





LES SCIENCES EXACTES

HISTOIRE DU MONDE

PUBLIÉE

SOUS LA DIRECTION DE M. E. CAVAIGNAC

Tome XIII

La CIVILISATION EUROPÉENNE MODERNE

IIIe partie

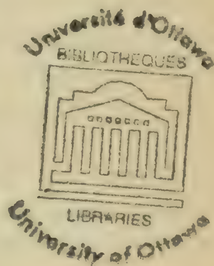
Les SCIENCES EXACTES

PAR

J. PÉRÈS

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille



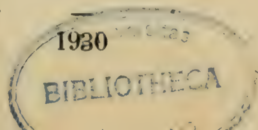


E. DE BOCCARD, Editeur

1, Rue de Médicis, 1

PARIS (VIe)

1930



Avant-Propos

Les premiers chapitres de cette étude retracent à très larges traits, l'histoire des Sciences exactes, dans l'Antiquité et au Moyen-âge. C'est une introduction nécessaire à l'étude du développement de la Science moderne.

Les spéculations des mathématiciens et des astronomes grecs, ont, en effet, très profondément influencé les savants de la Renaissance. Et, d'autre part, l'éveil scientifique qui se manifeste au XVe et au XVIe siècle serait inexplicable à qui voudrait ignorer le travail préparatoire du Moyen-âge, et négliger les précurseurs arabes et occidentaux : à l'époque de la Renaissance, la pensée du Moyen-âge féconde, peut-on dire, l'œuvre retrouvée des savants hellènes

Nous avons donc essayé d'abord de dégager quelques-unes des causes qui expliquent la décadence de la Science grecque et d'analyser le lent travail de redressement qui aboutit à la Renaissance. Il nous fallait aussi dresser un bilan sommaire des connaissances transmises aux hommes du XVe siècle, en marquant les différences de point de vue et de méthodes, afin que soient bien définies les *conditions initiales* du développement moderne des Sciences exactes.

Est-il besoin d'ajouter qu'en écrivant les Chapitres suivants nous ne pouvions avoir en aucune façon la prétention de donner un exposé complet

et détaillé. D'abord parce qu'il fallait respecter le cadre fixé pour le présent travail, ensuite afin que notre étude reste lisible pour ceux qui ne sont point mathématiciens de métier. Mais, plutôt que de rogner uniformément sur tout le détail, nous avons cherché à faire un choix, dût ce choix paraître parfois arbitraire.

CHAPITRE PREMIER

La Science grecque

---

§ 1. De Thalès à Archimède et Apollonius. Aperçu sur l'histoire de la géométrie grecque.

C'est sur la géométrie et non sur l'arithmétique, que se sont constituées les formes du raisonnement mathématique. En arithmétique, comme le remarque P. Tannery[1], des vérifications de calcul pourront suffire à justifier une vérité pressentie. En géométrie, « après l'acquisition d'un certain nombre de notions intuitives, on est arrêté, à moins de procéder par démonstrations rigoureuses ». Les savants hellènes, qui fondèrent la géométrie, ont inventé la démonstration mathématique, et c'est ce qu'il faut avant tout retenir de leur œuvre scientifique.

On peut noter qu'à cet égard les Grecs ne doivent rien aux peuples, Egyptiens ou Chaldéens, qui leur ont fourni les premiers éléments de la connaissance. L'art du calcul, la λογιστική des Grecs, procède sans aucun doute d'influences égyptiennes et l'on y retrouve par exemple, jusqu'au ve siècle de notre ère, l'usage égyptien d'exprimer en somme de quantièmes (fractions de numérateur unité), toute ex-

1. *Mémoires scientifiques*, t. V, p. 85.

pression fractionnaire. Sans doute, aussi, les observations astronomiques des Egyptiens, et surtout celles des Chaldéens qui étudient avec soin les éclipses et le mouvement des planètes, ne furent pas perdues pour les Grecs : c'est en comparant ses propres observations à celles des Babyloniens qu'Hipparque (vers — 120) peut reconnaître la précession des équinoxes; par ailleurs, et c'est un détail assez suggestif, la division sexagésimale du cercle, utilisée par les astronomes grecs et passée aux modernes, est d'origine chaldéenne. Mais dans tous ces emprunts de la Science hellénique à des civilisations antérieures, on cherche vainement les origines du *rationalisme* qui caractérise les spéculations des philosophes ou des savants hellènes.

Pour en revenir à la géométrie dont le développement, comme nous l'indiquions tout à l'heure, est tout à fait caractéristique, les connaissances pratiques des Egyptiens, réduites à quelques règles empiriques d'arpentage, constituaient un bien humble point de départ pour des recherches qui aboutirent à l'œuvre des géomètres gréco-alexandrins. Nulle part, peut-être, il ne serait plus légitime de parler d'un *miracle grec*.

D'après la tradition, le fondateur de la géométrie aurait été Thalès, le premier philosophe de l'Ecole de Milet, qui vécut dans cette ville vers — 600. Les renseignements que nous pouvons avoir sur son œuvre sont bien insuffisants pour en apprécier la portée. Tout au plus peut-on dire que cette œuvre marque l'assimilation, par la pensée grecque, des connaissances techniques qui venaient des orientaux et qui durent parvenir aux Grecs à la faveur

des relations commerciales très actives qu'entretenait l'importante métropole de Milet. Mais il semble que le premier développement de la géométrie et, en général, des Sciences exactes soit surtout dû à Pythagore (— 586-500) qui naquit à Samos et qui, après des voyages en Egypte et en Asie, mineure, vint s'établir en Grande-Grèce, à Crotone où il fonda une célèbre école philosophique et scientifique.

Suivant Eudème, Pythagore aurait « élevé la géométrie à la dignité d'une science » et ce que nous pouvons savoir des questions abordées par l'Ecole de Crotone permet de penser que, au moment où des événements politiques en amenèrent la dissolution, les progrès réalisés conditionnaient déjà, dans une large mesure, le développement ultérieur des mathématiques. La dispersion d'une Ecole où, semble-t-il, l'enseignement mathématique était réservé à des « initiés », tenus au secret, favorisa la diffusion des connaissances acquises. D'autre part il n'était peut-être pas indifférent que les découvertes mathématiques des Pythagoriciens se trouvent ainsi séparées de leur doctrine philosophique, et dégagées d'une sorte de « métamathématique » prématurée — mais dont l'idée même témoigne assez l'importance des résultats acquis.

Après la fin de l'Ecole de Crotone et la mort de Pythagore, qui survint peu après, nous retrouvons, dans diverses villes de la Grande Grèce et de la Grèce proprement dite, des communautés pythagoriciennes. Mais les représentants d'autres écoles philosophiques vont contribuer aussi aux progrès des sciences mathématiques. Il est probable que la diversité des points de vue amena des discussions, très

fécondes au moment où s'élaboraient les méthodes et c'est ainsi que, par exemple, les fameux sophismes de Zénon d'Elée pourraient se rattacher à des controverses amenées par la découverte des irrationnelles — découverte due aux Pythagoriciens et qui mit en évidence les difficultés que présente l'analyse de la notion de continu. Enfin il faut signaler l'intérêt qu'éveillent certains problèmes : duplication du cube et trisection de l'angle, quadrature du cercle, dont l'importance historique est grande et sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir.

Au IVe siècle, Athènes est le centre intellectuel de la Grèce et Platon qui y enseigne de — 380 à — 348 exerce une notable influence sur le développement des études mathématiques.

Nous n'avons pas à analyser ici le rôle que jouent les mathématiques dans l'élaboration de l'idéalisme platonicien. Mais il faut rappeler que Platon insiste souvent sur la valeur éducative des Sciences exactes, qu'il s'intéresse à leurs progrès, donnant même le conseil précis de poursuivre telles études (stéréométrie ou étude des lieux solides[1]) trop négligées à son sens. Il faut signaler aussi que Platon contribue, et avec une grande autorité, à préciser divers points de méthodologie : il est généralement suivi lorsqu'il préconise l'emploi exclusif de la règle et du compas dans les constructions géométriques; on lui doit probablement des progrès dans le choix des définitions et des axiomes et la notion nette des deux méthodes complémentaires d'analyse et de synthèse. C'est ainsi qu'indirectement, et sans avoir fait de véritables découvertes, Platon est un des personnages marquants de la science hellène.

1. Cf. Loria. *Scienze esatte nell'antica grecia*, p. 112, note 3.

L'œuvre mathématique de son contemporain Eudoxe, né à Cnide en — 408 et qui, vers — 368, fonda à Cyzique une école scientifique, est au contraire fort importante. Eudoxe surmonte définitivement les difficultés que présentait l'introduction géométrique des irrationnelles en donnant la théorie rigoureuse, celle que nous retrouverons dans le Ve livre d'Euclide, des proportions entre grandeurs quelconques : « pierre angulaire de toutes les mathématiques anciennes ultérieures, et, en outre, principe de la future théorie générale des grandeurs[1] ».

En établissant les théorèmes sur le volume de la pyramide et du cône, sur le rapport des volumes de deux sphères, il fixe les méthodes (démonstration par exhaustion) qu'utiliseront les anciens pour traiter les questions où intervient un passage à la limite[2]. Bref, avec Eudoxe, la géométrie grecque atteint sa maturité et son disciple, Ménechme, fonde la théorie des sections coniques, théorie qui tire peut-être son origine des recherches entreprises pour résoudre le problème de Délos[3].

Le IIIe siècle, qui marque le début de la période alexandrine, verra l'apogée de la science grecque. Les premiers Ptolémées attirent dans leur capitale d'Alexandrie artistes et littérateurs, philosophes et savants, et la fondation du *Musée* et de la *Bibliothèque* font de cette ville un incomparable centre d'échanges intellectuels. Au point où en étaient les Sciences exactes, leur culture en « serre chaude », dans la tranquillité qu'assure une longue période

1. Zeuthen, *Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le Moyen-âge*, trad. Mascart, p. 114.
2. Nous revenons sur ces méthodes au paragraphe 3 du présent chapitre.
3. Cf. Zeuthen, trad. Mascart, p. 157-163. Loria, p. 155.

de paix, avec les moyens de travail que la générosité éclairée des Lagides procure à des savants relativement spécialisés, ne pouvait manquer de produire des fruits remarquables. Et le développement des théories précédemment esquissées est poussé aussi loin qu'on pouvait l'attendre.

L'importance des résultats acquis éclipsa longtemps, pour la postérité, l'œuvre des fondateurs. Mais il ne faut pourtant pas oublier qu'en Mathématiques, aussi bien qu'en Philosophie ou en Littérature, la culture gréco-alexandrine tend très vite à devenir culture *d'érudits* dont l'originalité n'est pas la qualité dominante. Rien à cet égard ne saurait être plus caractéristique que la faible influence exercée alors par l'œuvre d'Archimède, — œuvre qui ne prendra toute sa valeur qu'au XVIe et au XVIIe siècle, avec les fondateurs du Calcul infinitésimal.

On doit évidemment reconnaître que les méthodes d'invention du géomètre syracusain, méthodes qui étaient essentiellement originales et dont l'assimilation eût pu renouveler la science hellène, disparaissent souvent dans son exposition : repris peut-être par des préoccupations d'école, Archiméde s'astreint en général à revenir, après la découverte, aux formes classiques de démonstration. Mais son œuvre ouvrait pourtant de larges horizons, et, pour n'en donner qu'un exemple, il divulgue, dans l'un de ses écrits[1], de féconds procédés d'intégration mécanique qui l'ont guidé dans ses recherches et il insiste sur leur importance : « Je suis persuadé, affirme-t-il, qu'à la faveur de cette méthode, une fois

1. Le *Traité de la Méthode relative aux théorèmes mécaniques*, retrouvé et déchiffré par Heiberg, en 1907.

qu'elle aura été exposée, d'autres propositions qui ne se sont pas encore présentées à moi-même, seront trouvées par d'autres, tant parmi ceux qui vivent que parmi ceux qui sont encore à naître[1] ». Les contemporains et les successeurs immédiats d'Archimède n'entendront pas cet appel et ne suivront pas la route vraiment « royale » qui leur était ainsi ouverte. Est-ce répugnance à introduire un élément étranger (statique en l'espèce) dans l'harmonieux édifice de la géométrie ? Peut-être bien, mais on ne saurait donner meilleure preuve du manque d'initiative des Alexandrins que cette méconnaissance de la véritable portée de l'œuvre du grand géomètre, cette incompréhension qui les fige dans l'admiration passive des *méthodes d'exposition*, inégalables dans leur ingéniosité.

Les trois plus grands géomètres de la période gréco-alexandrine ont été Euclide, Archimede et Apollonius.

Euclide (— 330, — 227) fut probablement appelé à Alexandrie par Ptolémée Soter, au moment même (— 300) de la fondation de l'Ecole; il marque la transition avec la période précédente et son œuvre la plus célèbre, les *Eléments*, est en somme le couronnement des recherches des géomètres d'Athènes et de Cyzique. Peut-être même, comme l'indiquent quelques témoignages, Euclide n'a-t-il fait que reprendre plus parfaitement des essais antérieurs[2].

Le titre grec du Livre « στοιχεῖα » marque suffisamment qu'il s'agit, non d'un exposé complet, mais d'un choix de propositions fondamentales

1. Cité d'après l'excellente traduction de P. Ver Eecke (*Œuvres d'Archimède*, Desclée et Brouver, éd., 1921), page 479.
2. Cf. Zeuthen, trad. Mascart, p. 86; Loria, p. 128.

convenablement coordonnées. La forme en est déductive, le point de départ étant un système de définitions (ὅροι), de postulats (αἰτήματα) qui affirment l'existence de certaines déterminations géométriques (ex. : mener une droite entre deux points), de notions communes (κοιναὶ ἔννοιαι) ou axiomes, affirmations posées comme évidentes (ex. : des grandeurs égales à une même grandeur sont égales entre elles). Les critiques, — et il en est d'évidentes — que suggère le choix de ces hypothèses fondamentales ne peuvent diminuer l'importance des *Eléments*, modèle pour tout le développement ultérieur des Sciences exactes. Il ne faut d'ailleurs pas exagérer ces critiques : le lecteur trouvera, dans le livre déjà cité de Zeuthen[1], une intéressante étude des hypothèses géométriques d'Euclide; Zeuthen y dégage, de façon saisissante, la valeur des hypothèses en question de la *forme* « insuffisante, pour une intelligence moderne du moins, sous laquelle se présentent plusieurs d'entre elles ». Enfin on doit être prudent en imputant à Euclide telles imperfections que peuvent présenter, dans le texte actuel des *Eléments*, les définitions, axiomes ou postulats; les remaniements des copistes ont dû s'exercer surtout sur cette partie préliminaire de l'œuvre[2].

L'œuvre d'Archimède et celle d'Apollonius sont notablement plus originales. Le premier de ces géomètres vécut (— 287, — 212) à Syracuse; mais il se rattache pourtant, indiscutablement, à l'école d'Alexandrie, où il passa dans sa jeunesse et connut divers savants : Conon de Samos, Erathosthène et Dosithée avec lesquels il resta en rapports. Les

1. P. 94-107.
2. Loria, p. 202.

principaux traités d'Archimède, dédiés à Dosithée ou à Erathosthène, sont rédigés pour leur communiquer les résultats de ses recherches et divers passages des préfaces ne laissent aucun doute sur la continuité des relations scientifiques entre le Syracusain et les maîtres d'Alexandrie.

Presque contemporain d'Archimède, Apollonius de Perge enseigna au contraire à Alexandrie; il fit un séjour à Pergame où Attale I[er] venait de fonder une université analogue à celle d'Alexandrie.

Il ne nous reste que des fragments des écrits des mathématiciens pré-alexandrins, de sorte que, à l'époque de la Renaissance comme à l'époque actuelle, c'est l'œuvre des trois savants précédents qui représente dans sa partie la plus essentielle la science grecque. Pour la suite, il importera d'en dégager quelques traits caractéristiques et ce sera l'objet des paragraphes suivants. Mais auparavant, nous marquerons quelques différences dans l'influence qu'ont pu exercer, sur le développement de la science occidentale, les écrits conservés d'Euclide, d'Archimède ou d'Apollonius.

Les *Eléments* d'Euclide, durent à leur caractère didactique une très grande diffusion; plus ou moins remaniés, ils formèrent chez les Arabes comme chez les Occidentaux et jusqu'à l'époque actuelle, la substance de tout enseignement élémentaire de la géométrie, l'initiation aux formes du raisonnement mathématique.

Les travaux d'Archimède et d'Apollonius sont naturellement moins accessibles, mais de plus, l'œuvre principale du dernier de ces géomètres, son *Traité des coniques*[1] apparaît, à première vue,

1. Dont nous possédons, texte grec ou traduction arabe, les sept premiers livres, l'ouvrage complet en comportant huit.

comme plus foncièrement grecque et même hellénistique, comme le produit, moins riche de possibilités, d'une civilisation déjà très évoluée. Cette remarque n'est point pour diminuer la valeur du *Traité des Coniques*. L'auteur est un des esprits les plus remarquables qui aient existé et son œuvre — où l'originalité de la pensée n'est pas moins admirable que la qualité de l'exposition — fut un ouvrage d'enseignement classique dans les écoles grecques et dans les écoles arabes. Mais il ne pouvait peut-être pas donner impulsion immédiate à de nouvelles recherches.

Si l'on va au fond des choses, on reconnaît, dans le traité d'Apollonius, des méthodes fort analogues à celles de notre moderne géométrie analytique[1]. Chasles, puis de nos jours Zeuthen[2] ont souligné l'analogie. Pourrait-on donc, de même qu'Archimède est justement considéré comme le fondateur du calcul infinitésimal, faire remonter à Apollonius les origines de la géométrie analytique? Il ne le semble pas, car si les méthodes de l'analyse infinitésimale apparaissent explicitement dans l'œuvre d'Archimède, celles de la géométrie analytique ont une portée et une généralité qui n'est pas dans les écrits d'Apollonius et de ses successeurs.

1. « Que l'on ajoute à l'œuvre du géomètre grec, la notion de foyer d'une parabole, et celle de directrice et l'on aura une théorie des coniques qui, en substance, ne diffèrera pas d'une exposition moderne de cette même doctrine » (Loria, p. 383).
2. *Loc. cit.*, pp. 168-9.

§ 2. Géométrie et Algèbre géométrique

Si les *Eléments* d'Euclide se différencient d'un traité moderne de géométrie élémentaire, c'est d'abord, dès les premiers livres, par la place importante qu'y tient *l'Algèbre géométrique.* Zeuthen désigne ainsi un ensemble de constructions, sur des grandeurs figurées géométriquement, constructions qui correspondent, si l'on passe aux notations modernes, à des identités algébriques plus ou moins fondamentales.

Il faut en rapprocher les spéculations d'*Arithmétique géométrique* sur les nombres plans (carrés, triangulaires ou polygonaux) et sur les nombres solides, spéculations d'origine pythagoricienne et pour lesquelles les Grecs manifestent un goût prononcé[1] : premiers éclairs de la pensée scientifique des Grecs, ces spéculations en marquent aussi, avec les néo-pythagoriciens et les néo-platoniciens, le dernier éclat.

1. On obtient ainsi aisément, par exemple, des sommes de progressions géométriques et, en particulier, la somme des n premiers



(fig 1)

nombres entiers. Les unités de ces nombres seront figurées par des points disposés en rangées horizontales, les unes au-dessous des autres, de manière à former un triangle. Il suffit alors de compléter ce triangle par un autre égal, de manière à former un rectangle, qui aura n lignes et $n + 1$ colonnes (5 et 6 dans la figure ci-contre), de sorte que $n(n + 1)$, donnera le double de la somme cherchée des n premiers nombres.

On peut, avec quelque vraisemblance, reconstituer ainsi le développement de l'Algèbre géométrique. C'est d'abord, dans l'Ecole de Pythagore, une tentative — qui ressortit d'une théorie générale de la connaissance— pour identifier les propriétés des figures géométriques et celles des nombres entiers ou rationnels : la découverte des incommensurables vint en montrer l'inanité. Mais, en même temps, devenaient manifestes les avantages d'une interprétation géométrique, qui, en représentant les grandeurs par des segments, leurs produits par des aires, fournissait des démonstrations applicables à tous les cas. On aboutit ainsi à une sorte d'Algèbre puisque, « au même titre qu'une lettre en algèbre, la représentation d'une grandeur par la longueur d'un segment peut s'appliquer à des grandeurs variant de façon continue[1]. »

Les démonstrations géométriques bien connues, et que la figure ci-contre suffit à rappeler, de formules telles que :

ab	b^2
a^2	ab

(*fig. 2*)

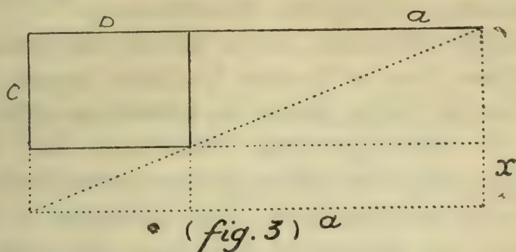
$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

peuvent donner une idée (un peu sommaire) du contenu de l'algèbre géométrique. Un problème fondamental[2] est celui de l'application simple (παραβολή)

1. Zeuthen, trad. Mascart, p. 30.

2. Fondamental, parce que, pour ajouter ou retrancher des grandeurs représentées par des aires, il est commode de leur donner un côté commun.

des surfaces, c'est-à-dire la détermination d'un rectangle équivalent au rectangle donnée *bc* et



(*fig. 3*)

dont un côté *a* est donné : le lecteur en comprendra la solution s'il prend la peine de refaire la figure 3, à partir des seules données *abc* (marquées en traits pleins).

Un peu plus compliquée, *l'application elliptique* ou *hyperbolique* correspond à la résolution des équations du 2e degré.

$$ax \mp x^2 = b^2$$

Dans les coniques d'Apollonius, ces constructions trouvent une intéressante application : les diverses sections coniques y sont finalement rapportées à un diamètre et à la tangente en une extrémité ; les équations cartésiennes :

$$y^2 = 2\,px \quad y^2 = 2\,px - \frac{p}{a}x^2 \quad y^2 = 2\,px + \frac{p}{a}x^2$$

qui conviennent aux trois types de sections correspondent successivement à l'application simple, elliptique ou hyperbolique et les noms donnés aux courbes : parabole, ellipse ou hyperbole sont les noms mêmes des opérations d'algèbre géométrique qui intervenaient dans leur définition.

Le lecteur a déjà remarqué que la παραβολή donne une construction de la quatrième proportionnelle, moins immédiate que celle qui résulte des propriétés d'une transversale parallèle dans un triangle. Mais ces propriétés impliquent la notion de *rapport*

dont l'étude générale présentait dans le cas des *rapports incommensurables* des difficultés qu'évitent les méthodes d'Algèbre géométrique.

Le traité d'Euclide, où la théorie rigoureuse des proportions, due à Eudoxe de Cnide apparaît seulement au Ve Livre, donne en somme un reflet assez fidèle du développement historique. La théorie d'Eudoxe, plus tard venue, sous sa forme rigoureuse, dans la science grecque, plus abstraite et moins conforme aux tendances plastiques du génie grec, vient se juxtaposer seulement à l'Algèbre géométrique. Elle la complètera et fusionnera avec elle, mais sans tenir la place prépondérante que méritait une théorie vraiment générale.

Nous rencontrons ici, peut-être, l'une des causes essentielles qui amenèrent la décadence de la science grecque : une certaine répugnance pour les abstractions et surtout l'insuffisance du sens des généralisations. A l'époque alexandrine, la géométrie supplée à l'algèbre, comme nous venons de le voir, et les spéculations d'arithmétique théorique, qui tiennent aussi large place dans les *Eléments*, se présentent également sous forme géométrique. C'étaient des conditions peu favorables pour que s'élabore un système de notations pratiques, indispensable aux progrès ultérieurs et pour que la notion générale et abstraite de grandeur se dégage complètement de représentations concrètes, d'ailleurs très rigoureuses. Mais la science grecque s'élève rarement au-dessus du cas particulier. Elle poursuit indéfiniment le développement de principes une fois posés, sans se préoccuper assez de l'économie de pensée que peuvent réaliser des rapprochements entre recherches diverses, lorsqu'on peut les réunir en *appli-*

cations d'une théorie plus compréhensive. C'est là sa faiblesse et le lecteur va s'en rendre compte, mieux encore, à propos des spéculations où intervient la notion d'infini.

§ 3. Les débuts du calcul infinitésimal

Nous avons déjà fait une allusion aux sophismes de Zénon d'Elée : arguments contre la pluralité, arguments contre le mouvement. Ces arguments sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les reproduire ici[1]. Mais il faut du moins signaler qu'ils constituent la plus ancienne trace qui nous ait été conservée de la pensée infinitésimale.

Doit-on croire qu'ils dominent, chez les Grecs, tout le développement de cette pensée? C'est une opinion qui a été souvent exprimée : la crainte plus ou moins consciente de donner prise à la dialectique éléate dans les questions où interviennent l'infini et le continu, aurait amené les mathématiciens à négliger l'esprit de méthodes générales et fécondes, pour fixer leur effort sur la rigueur formelle des procédés dits d'exhaustion, qui permettent de tourner la difficulté, par une réduction à l'absurde.

C'est peut-être beaucoup dire. Il est certain que, de très bonne heure, les Grecs ont eu pleine conscience des difficultés en question. Les arguments de Zénon en peuvent témoigner et intéressent, à ce titre, l'histoire des Sciences exactes. J'admettrai volontiers qu'ils aient pu faire impression sur les

1. Leur étude appartient d'ailleurs bien plus à l'histoire de la philosophie qu'à celle des Sciences exactes et nous ne pouvons mieux faire que renvoyer ici le lecteur à l'exposé qu'en donne M. L. Robin *La Pensée grecque,* Bibliothèque de Synthèse historique pp. 110-114).

contemporains de Zénon et diriger ainsi plus ou moins, à ses débuts, l'analyse infinitésimale. Mais, dès l'époque d'Eudoxe, et, à fortiori, chez les Alexandrins, les Sciences exactes étaient assez dégagées des spéculations métaphysiques pour que les savants prêtent peu d'attention à des paradoxes qui, sans doute, gardaient leur importance pour le philosophe. La méthode d'exhaustion, qu'utilisent les Grecs dans leurs déterminations infinitésimales, impliquait, comme nous le verrons, une compréhension de la notion de limite qui laisse, bien loin en arrière, la dialectique de Zénon.

Faut-il pourtant admettre, que le désir de garder des formes impeccables ait pu, quelle qu'en soit l'origine, paralyser les facultés d'invention des mathématiciens grecs. Il est permis d'en douter lorsque l'on voit, dans la période moderne, quels progrès décisifs entraîne le développement rigoureux des principes de l'Analyse mathématique. Mais si, à cet égard, l'œuvre des Grecs serait plus proche de nous que celle des maîtres du XVIe et du XVIIe siècle, il reste, pour en marquer les bornes, une différence que nous avons déjà signalée et sur laquelle il faut insister : chez les Anciens l'étude, heureusement conduite et souvent très profonde, de questions particulières, ne sera généralement pas suivie du travail de synthèse qui en dégage une théorie plus générale.

Quelques exemples vont nous permettre de préciser. Envisageons d'abord le lemme (Euclide, *Eléments*, Livre X, 1) qui constitue le pivot de la méthode d'exhaustion : si l'on enlève la moitié d'une grandeur (ou plus de la moitié) puis la moitié (ou plus) du reste, et ainsi de suite, on arrivera, en répétant cette opération un nombre suffisant de fois, à un

nombre inférieur à n'importe quelle grandeur de même espèce, donnée à l'avance. Dans le langage moderne nous dirions simplement « en répétant indéfiniment l'opération indiquée, on obtient, à la limite, zéro ». Mais s'il nous fallait éviter, pour un ignorant, l'emploi du mot *limite*, nous ne pourrions mieux faire que revenir aux termes mêmes d'Euclide. Le mot *limite* manque à Euclide et c'est peut-être pourquoi — ce qui est beaucoup plus grave — le concept lui-même ne se détache en aucune façon du cas très particulier qu'envisage l'énoncé précédent.

Les Grecs rencontreront ainsi, dans leurs investigations infinitésimales, d'autres cas particuliers et sauront les élucider de façon parfaite. Mais ils resteront toujours dans la situation de qui, au moment d'entreprendre un nouveau travail, doit d'abord forger ses outils et les adapter strictement aux besoins du moment. Dans ces conditions, les progrès accomplis, si remarquables soient-ils, n'appellent ni ne facilitent de nouvelles recherches.

La proposition 2 du XIIe livre d'Euclide constitue l'une des applications les plus simples de la méthode d'exhaustion et en donnera au lecteur une idée suffisante. Il s'agit d'établir que les surfaces A et B de deux cercles sont entre elles comme les carrés des diamètres a^2 et b^2, le résultat analogue étant connu pour les polygones réguliers semblables inscrits. C étant une grandeur définie par la proportion :

$$A : C = a^2 : b^2$$

la démonstration par l'absurde doit prouver que les inégalités :

$$C < B \text{ ou } C > B$$

sont impossibles.

La notion de limite interviendra ici par le lemme rappelé précédemment : en doublant les côtés d'un polygone inscrit, on enlève en effet plus de la moitié de la surface restante du cercle, de sorte que, si l'on avait, par exemple :

$$B > C$$

on pourrait (lemme) trouver des polygones semblables A' et B' inscrits dans A et B et tels que :

$$B - B' < B - C$$

donc :

$$B' > C$$

mais alors les rapports :

$$a^2 : b^2 = A : C = A' : B'$$

seraient impossibles car $A' < A$ tandis que $B' > C$.

Cette démonstration établit en somme que, deux grandeurs variables restant dans un rapport constant, leurs limites sont dans le même rapport. Zeuthen[1], ayant fait cette remarque, ajoute : « Toutefois les Anciens n'établissent pas cette propriété une fois pour toutes, car cela reviendrait à vouloir expliquer des notions de même nature que l'approximation infinitésimale, et par suite à les admettre, ce qu'il ne font pas. » Je n'arrive pourtant pas à me convaincre que, ayant très parfaitement éclairci un cas particulier, le géomètre grec eût pu trouver quelque difficulté dans un énoncé un peu plus abstrait sur lequel on aurait attiré son attention.

Il n'y pense pas — c'est un fait — et il estime sa tâche terminée lorsqu'il a développé rigoureusement sa démonstration Nous avons à cet égard, plus d'exigence, plus d'expérience aussi, et c'est peut-être l'une des différences essentielles entre notre

1. Trad. Mascart, p. 138.

science et celle des Anciens. Différence qui suffit à expliquer que la Science gréco-alexandrine ait très vite trouvé ses bornes : sa décadence devenait dès lors irrémédiable.

Pour terminer ce paragraphe, nous devons donner quelques indications sur l'œuvre d'Archimède, qui exercera sur la Renaissance une grosse influence. Nous y retrouverons la méthode d'exhaustion, toujours strictement adaptée aux problèmes à résoudre et affectant les formes les plus diverses. Tantôt, comme dans la quadrature d'un segment de parabole, le nœud de la détermination infinitésimale réside dans la sommation d'une série. Tantôt, au contraire, et il en est ainsi dans les évaluations de volumes du Traité des sphéroïdes et des conoïdes[1], le procédé d'Archimède revient en fait à envisager une intégrale comme limite d'une somme de rectangles — ce qui est la méthode actuelle —. Le géomètre syracusain connaît ainsi les intégrales de xdx et x^2dx, et par des raisonnements qui s'appliquent aisément aux puissances successives de x[2].

Enfin, en ce qui concerne le calcul différentiel, il faut noter, dans la Science grecque, un certain nombre de détermination de tangentes : tangente au cercle, tangentes aux coniques, à la spirale dite d'Archimède[3]. Mais il ne s'agit que de cas particuliers et c'est seulement beaucoup plus tard, avec Fermat et Descartes, que nous rencontrerons les pre-

1. Sphéroïde, c'est-à-dire ellipsoïde de révolution; conoïde, c'est-à-dire paraboloïde ou hyperboloïde de révolution.

2. Cf. P. Tannery, *Œuvres*, t. I, p. 178.

3. C'est la courbe dont le rayon vecteur est proportionnel à l'angle de ce rayon vecteur avec une direction fixe. Elle apparaît probablement comme pouvant servir à la division de l'angle et à la quadrature du cercle.

mières méthodes générales, pour la détermination des tangentes.

§ 4. L'Astronomie grecque

Le développement de l'Astronomie grecque, dont nous avons maintenant à nous occuper, n'a pas été moins remarquable que celui de la Géométrie.

Nous avons déjà indiqué qu'il a son origine dans les observations des Egyptiens et des Chaldéens. Ces derniers surtout, ont été d'excellents observateurs. L'importance qu'ils attachent à l'Astrologie, dont il furent les fondateurs, explique l'attention avec laquelle ils suivent le mouvement des planètes et, en général, tout ce qui est déplacement angulaire des astres : c'est dans un but essentiellement pratique qu'ils cherchent à prévoir assez à l'avance — et ils y parviennent — les configurations des planètes dans le zodiaque. On leur doit enfin, bien probablement, les premiers éléments du matériel astronomique : *gnomon* et *polos*[1].

1. Le *gnomon* le plus simple est constitué par une tige verticale qui, par observation des ombres donne le midi vrai, la méridienne d'un lieu, la hauteur du soleil.

Le *polos* est essentiellement une coupe hémisphérique portant, en son axe, un style dont l'extrémité vient au centre de la sphère. L'ensemble réalise un cadran solaire hémisphérique creux et l'ombre de l'extrémité du style sur la surface intérieure de la coupe décrira, à une échelle réduite, la course du soleil. Le polos convenablement gradué, permet l'étude assez précise du mouvement solaire et la détermination d'éléments tels que l'inclinaison de l'écliptique.

Complété par une sphère en treillis métallique, *l'arachnê*, portant la figuration du zodiaque et qui s'adapte exactement à la cavité hémisphérique, le *polos* donne l'*astrolabe* (sous sa première forme) et permet de lire, de nuit, l'heure solaire. Il suffit, pour y parvenir, de placer l'arachnê dans la position convenable en assurant qu'une ligne de visée, partant de la pointe du style, rencontre à la fois une étoile et son image sur l'arachnê. L'appareil conduit aussi, avec

Tout cet ensemble de connaissances ne parviendra d'ailleurs aux Grecs que progressivement et même assez lentement jusqu'à l'époque des conquêtes d'Alexandre. Aussi l'astronomie hellène peut-elle se développer de façon fort originale.

L'un de ses traits caractéristiques sera l'importance qu'y prennent les théories cosmogoniques. Celles des Chaldéens restèrent probablement rudimentaires tandis que les philosophes grecs cherchent à expliquer les phénomènes et passent en revue, peut-on dire, toutes les hypothèses possibles sur la nature et l'agencement des corps célestes.

La notion de sphéricité de la terre paraît avoir été introduite par Pythagore et, après Platon, elle sera définitivement acquise à la Science. Platon suit encore les pythagoriciens quand il pose le problème, fondamental dans l'astronomie antique, de chercher à représenter les révolutions planétaires par des combinaisons de mouvements circulaires et uniformes.

Une première et très remarquable solution du problème fut donnée par Eudoxe de Cnide : il imagine que chaque planète est fixée à l'équateur d'une sphère animée d'un mouvement de rotation, les pôles de la sphère étant eux-mêmes entraînés par le mouvement d'une autre sphère concentrique à la première et tournant autour d'un axe différent, et ainsi de suite. Il obtient ainsi, en introduisant pour chaque corps céleste, un système de 3 ou 4 sphères concentriques, une représentation assez satisfai-

quelques modifications, à la détermination des coordonnées astronomiques, longitude et latitude céleste puisqu'il précise la position de l'écliptique dans la sphère céleste.

sante des observations[1] et la théorie d'Eudoxe, adoptée par Aristote, gardera des partisans jusqu'au XVIe siècle.

Une autre théorie, plus satisfaisante, sera généralement préférée, c'est celle des excentriques et des épicycles. Le soleil décrit, uniformément, un cercle dont le centre ne coïncide pas avec celui de la terre (*excentrique*), ce qui explique immédiatement les variations de sa vitesse apparente et celles de sa distance qui se manifestent par le diamètre apparent. Pour les planètes, interviennent les *épicycles* : ce nom désigne un cercle dont le centre décrit un autre cercle qui sera concentrique ou même excentrique à la terre — et on voit immédiatement que le mouvement d'une planète sur un épicycle rendra compte des stations et des rétrogradations.

Cette théorie, évidemment beaucoup plus souple que celle d'Eudoxe, fut développée par Apollonius de Perge, puis par Hipparque, le plus grand astronome de l'Antiquité. Elle dominera toute l'astronomie jusqu'au moment où, après Copernic et Képler, triomphera le système héliocentrique.

Il faut encore ajouter que l'on peut retrouver dans la science grecque l'origine des conceptions coperniciennes. Philolaos — qui fut contemporain de Socrate — et d'autres pythagoriciens, envisagent le mouvement de la terre autour d'un feu central (dont le soleil n'est qu'un reflet); Héraclide du Pont, disciple de Platon, imagine que les planètes inférieures (Mercure et Vénus) tournent autour du soleil, ce qui est un acheminement vers la théorie hélio-

1. Sans entrer dans le détail on peut ajouter que la dernière sphère, la plus extérieure, donnait le mouvement diurne, tandis que la précédente réalisait le mouvement de la planète suivant l'écliptique.

centrique; enfin, cette théorie elle-même était soutenue au début du IIIe siècle avant notre ère, par Aristarque de Samos.

Il s'agit là probablement *d'idées à priori* plutôt que de *développements systématiques* et si les noms de Philolaos, Héraclide et Aristarque appartiennent à l'histoire de l'astronomie, c'est principalement parce que leurs idées, conservées par des contradicteurs, devaient ouvrir de nouvelles possibilités au moment où la précision des observations rend manifeste l'insuffisance des excentriques et des épicycles. La supériorité des vues d'Aristarque ne pouvait d'ailleurs, en aucune façon, apparaître aux yeux des savants grecs. Il faut y insister. Leur théorie du monde est, en effet, non point *mécanique* mais *géometrique* ou plus exactement *cinématique*. Dans ces conditions, le progrès des observations eût pu les amener à renoncer à leurs combinaisons de mouvements rigoureusement circulaires; mais il ne pouvait leur donner aucune raison décisive d'abandonner le dogme de l'immobilité de la terre — vérité de sens commun non moins intuitive, en première analyse, que celles qui sont à la base de la géométrie. La théorie héliocentrique ne pouvait s'imposer, sans discussion possible, qu'après le développement de la mécanique newtonienne.

L'apogée de l'astronomie grecque est marquée par l'œuvre d'Hipparque qui appartient à l'école d'Alexandrie et vécut au IIe siècle avant J.-C., à Alexandrie, puis à Rhodes où il paraît avoir fait la plupart de ses observations. C'est un observateur remarquable et qui a aussi, à sa disposition, les résultats — tables et éphémérides — de l'astronomie chaldéenne. Nous avons déjà indiqué sa découverte

de la précession des équinoxes. On lui doit aussi une foule de déterminations astronomiques souvent précises, le premier catalogue d'étoiles fixes, la notion de coordonnées géographiques, le développement des méthodes pour la résolution des triangles sphériques et l'établissement d'une table de cordes, c'est-à-dire en fait d'une première table trigonométrique. Enfin, en ce qui concerne la représentation par excentriques et épicycles, des mouvements célestes, on lui doit la théorie du soleil et de la lune et seulement, semble-t-il, le principe de la théorie des planètes.

L'œuvre d'Hipparque restait donc *à suivre*. Elle fut reprise et complétée 3 siècles plus tard par Ptolémée d'Alexandrie, qui observa dans cette ville entre + 125 et + 150 et mourut en + 168. L'ouvrage fondamental de ce savant (Μαθηματική ou Μεγιστη σύνταξις *Al Midschisti* des Arabes, *Almageste* des Occidentaux) suscita la plus grande admiration et fit oublier les travaux de ses prédécesseurs. C'est seulement par l'intermédiaire de Ptolémée que nous pouvons nous faire une idée de l'importance — et de la supériorité — des recherches d'Hipparque. Chez les Arabes, comme au Moyen-Age et à l'époque actuelle, l'Almageste restera l'œuvre éminemment représentative de l'Astronomie grecque[1].

C'est aussi surtout par l'Almageste que nous pouvons être renseignés sur la *trigonométrie* des Anciens. Le développement de cette discipline est en effet indispensable aux progrès théoriques de l'Astronomie, où les mesures n'atteignent directement en général que des grandeurs d'angles.

1 En dehors de l'Almageste, il ne subsiste guère qu'une collection d'œuvres plus élémentaires, qui paraissent représenter l'état de l'astronomie grecque à l'époque d'Eudoxe.

Déjà, dans un travail d'Aristarque qui nous a été conservé et qui concerne la détermination des grandeurs et des distances du soleil et de la lune, interviennent des déterminations de rapports de longueurs par la valeur connue d'un angle d'un triangle[1]. Nous avons indiqué plus haut que l'on doit à Hipparque une première table des longueurs de cordes[2]. On trouve dans l'Almageste une table analogue comportant les valeurs de cordes d'arcs, croissants, par intervalles de *un demi-degré*, de 0 à 180 ; c'est donc, si l'on envisage les arcs moitiés, une table de sinus naturels procédant par intervalles d'un quart de degré.

Ptolémée utilise systématiquement dans ses calculs les fractions sexagésimales. Les indications qu'il nous donne sur l'établissement de sa *table* montrent qu'il avait à sa disposition, *sous forme géométrique*, les formules essentielles de notre trigonométrie : les relations — qui ont gardé son nom — entre côtés et diagonales d'un quadrilatère inscrit impliquent ainsi, il est aisé de s'en rendre compte, nos théorèmes concernant l'addition ou la soustraction des arcs; Ptolémée sait aussi passer d'un arc à l'arc moitié. Tous ces résultats sont essentiels ici, puisqu'ils permettent de baser le calcul de la table des cordes

1. Aristarque envisage par exemple, au moment de la quadrature, le triangle lune-terre-soleil. L'angle en L de ce triangle est droit. L'angle en T peut être mesuré. C'est la distance angulaire entre la lune et le soleil qu'Hipparque évalue à 87° (au lieu de 89°51'', valeur exacte). Le rapport des distances de la Lune et du Soleil à la terre est le cosinus de cet angle qu'Aristarque montre être compris (pour 87°) entre 1/18 et 1/20. La méthode est ingénieuse, mais pratiquement sans valeur, une faible erreur commise dans l'évaluation de l'angle L T S en entraînant une importante sur le rapport des distances.

2. L'œuvre d'Hipparque à cet égard a été préparée par les travaux d'Archimède et d'Apollonius concernant la détermination précise de la longueur de la circonférence.

sur les valeurs, connues depuis fort longtemps, des côtés des polygones réguliers les plus simples.

Nous nous dispenserons d'insister sur les méthodes utilisées par Ptolémée dans les questions de trigonométrie sphérique. On y retrouve encore, dès que l'on va au fond des choses, un parallélisme évident avec les procédés modernes. Seulement, la trigonométrie des Grecs, de même que leur Algèbre, ne se dégage pas du tout des formes géométriques Il manque des notations, des algorithmes, qui en fassent autre chose qu'un recueil de problèmes particuliers, qui facilitent la vue d'ensemble des méthodes, leur assimilation et leur application.

Ptolémée appartient déjà à une époque de décadence. Il fut, sans aucun doute, un observateur bien inférieur à Hipparque. Les perfectionnements qu'il veut apporter aux théories d'Apollonius et d'Hipparque ne sont pas toujours très heureux : lorsque, par exemple, il reprend la théorie de la lune en y introduisant l'*évection*, il réussit seulement à exagérer, en ce qui concerne la variation des distances[1], le désaccord entre la théorie et les observations[2]

Quelques défauts n'empêchent point l'Almageste d'apparaître comme l'une des œuvres maîtresses de la Science hellène. Œuvre définitive jusqu'au moment où, beaucoup plus tard, tout un ensemble de recherches viendra concourir au développement de l'Astronomie moderne : progrès de la mécanique, perfectionnement du matériel d'observation (invention de la lunette), progrès des procédés de calculs tant théoriques (développement du symbolisme) que pratiques (invention des logarithmes)

1. Les éclipses fournissaient à cet égard des renseignements précis.
2. Mais ce défaut ne fut signalé que de nos jours, par P. Tannery !

§ 5 Le déclin de la Science grecque
Héron d'Alexandrie ; Diophante.

Des événements historiques qu il faut rappeler peuvent contribuer à *expliquer* la décadence de la Science grecque.

Les conquêtes d'Alexandre permettent un rayonnement considérable de la civilisation hellène, mais cet épanouissement ne peut aller sans une *dégradation d'énergie*, sans un affaiblissement, qui est très marqué, des qualités originales de la race. Dans la décomposition politique, assez rapide, du monde hellénistique, il faut retenir deux dates significatives : en — 212, le sac de Syracuse (et la mort d'Archimède y prend toute la valeur d'un symbole) consomme la ruine des colonies grecques d'Occident qui avaient joué un rôle primordial dans l'élaboration de la pensée scientifique; en — 30, après une longue période fort troublée, où ne se retrouvent évidemment pas les conditions exceptionnellement favorables qui marquaient le règne des premiers Ptolémées, l'Egypte est réduite en province romaine — et cette dernière date peut marquer la fin de la première Ecole d'Alexandrie.

L'Université de cette ville redeviendra d'ailleurs très florissante sous la domination romaine, mais elle vivra *sur le passé* : les savants de la période gréco-romaine sont, avant tout, des commentateurs et ils ont surtout contribué,— c'est un rôle qui n'est rien moins que négligeable —, à assurer la transmission des œuvres de l'époque précédente. Parmi ces savants, il faut surtout citer, avec Ptolémée, Pappus

d'Alexandrie (fin du IIe siècle de notre ère?) : sa *Collection Mathématique*, vaste encyclopédie, est l'une des œuvres représentatives de la géométrie grecque, et elle est fort précieuse pour l'historien.

Comment est-il possible que, durant la longue existence de la seconde Ecole d'Alexandrie, une activité scientifique, qui dans l'ensemble est indéniable, s'applique seulement à glaner dans les champs déjà moissonnés? Les vicissitudes politiques sont ici hors de cause et ce sont des raisons *intrinsèques* qu'il faut chercher pour expliquer la stérilité définitive de la Science grecque à cette époque.

Nous avons déjà donné l'une de ces raisons : c'est, en gros, une certaine inexpérience, après tout fort naturelle dans le développement rapide de la géométrie, qui fait que les nouvelles acquisitions viennent seulement agrandir l'édifice, sans jamais amener les remaniements nécessaires dans son architecture générale. Inexpérience qui n'est surement point dans l'esprit des grands géomètres alexandrins, dont le génie domine les recherches particulières : mais l'exposé qu'ils font de leurs découvertes ne donne pas, à cet égard, les directives nécessaires pour que leurs successeurs puissent faire fructifier un très lourd héritage.

Il faut ajouter[1] que la forme géométrique qu'affectent l'Algèbre et la Trigonométrie, forme excellente autant que se maintient une tradition orale, rend fort malaisée la lecture d'ouvrages « méticuleusement élaborés ». Aussi, après une éclipse comme celle qui marque le règne des derniers Ptolémées, l'effort des chercheurs doit-il d'abord s'épuiser à

1. Zeuthen, trad. Mascart, p. 202.

renouer la chaîne interrompue, à ajouter les commentaires devenus nécessaires aux œuvres classiques.

L'étude de questions de Mathématiques appliquées eut pu, pourrait-on imaginer, élargir le champ de la science grecque et ouvrir à la recherche de nouveaux domaines. Mais c'est ici le lieu de faire observer comment, dans les œuvres classiques, la perfection même des formes géométriques éloigne des questions pratiques qui restent sur un plan très inférieur. L'Algèbre géométrique donne une exactitude idéale dans des constructions dont la traduction numérique ne peut procéder que par approximations. Aussi la logistique (art du calcul) ne fait-elle point partie de la Science et nous sommes le plus souvent réduits à des conjectures sur les méthodes qu'emploient les mathématiciens dans leurs déterminations numériques[1]. La séparation ainsi faite entre la Science et ses applications pratiques, dut être très défavorable à la première, aux époques où s'affaiblissait le goût des recherches désintéressées.

Pour limiter d'ailleurs le champ ouvert au développement de la Science grecque, intervenait enfin cette idée que l'édifice géométrique donne, pour toute investigation scientifique, un *modèle* définitif : toute science consiste dans une chaîne de déductions qui découlent de quelques principes, posés à priori et de façon définitive, principes de sens communs et d'expérience courante. C'est bien ainsi que se constitue la Géométrie, tandis que, dans des sciences plus expérimentales, les principes sur lesquels doit s'appuyer une théorie mathématique sont

1. Archimède, par exemple, dans sa *Mesure du cercle*, et même Ptolémée dans l'*Almageste*. Il faut faire une exception pour Héron dont nous parlerons dans la suite.

beaucoup moins immédiats : ils ne se présentent point naturellement à l'esprit et ne peuvent se dégager qu'après de multiples tâtonnements, par l'analyse et la critique d'observations ou d'expériences. Les exceptions concernent uniquement les rares théories — statique et détermination des centres de gravité, hydrostatique, éléments d'optique géométrique[1] — qui, à côté des pures spéculations mathématiques, trouvent place dans la Science antique.

Dans le même ordre d'idées, il n'est pas sans intérêt de s'arrêter un instant sur les idées que pouvaient avoir les Anciens concernant la *mécanique*. Voilà une Science où les axiomes fondamentaux (principe de l'inertie, mesure des forces par les accélérations) ne sont pas du tout imposés, de façon nécessaire, par les données de l'expérience vulgaire. Qui peut y réfléchir pour la première fois sera d'abord frappé des différences apparentes entre les mouvements « naturels » (astres, chutes des graves) et les autres (mouvements « violents ») qui ne peuvent être maintenus qu'autant que se prolonge l'action d'un moteur[2]. D'autre part, son attention se portera avant tout sur la *vitesse* du mobile et c'est elle, et non l'*accélération*, qui sera prise pour représenter la force du « moteur »; elle lui sera évidemment proportionnelle. Toutes ces notions fausses, qu'impose le bon sens, sont, en gros, celles des Anciens et nous les retrou-

1. Est-il besoin de rappeler qu'Archimède développe la théorie du levier et qu'on lui doit la notion de centre de gravité et l'étude de l'équilibre des corps flottants. Il nous est parvenu, sous le nom d'Euclide, deux petits traités concernant les conséquences les plus simples de la propagation rectiligne de la lumière et des lois de la réflexion.

2. A cause des résistances inévitables.

vons plus ou moins complétées et modifiées dans la Mécanique d'Aristote[1] .

Bien que, dans l'ensemble, l'originalité fasse souvent défaut dans les œuvres conservées de la période de décadence, il serait injuste de ne pas noter, dans cette période même, les débuts du mouvement, *fort lent*, qui, à travers une régression peut-être inévitable, devait amener au développement de la Science moderne. Il faut retenir ici à cet égard, comme significative, l'œuvre de *Héron d'Alexandrie* et, surtout, celle de *Diophante.*

Héron d'Alexandrie vécut probablement vers le début de l'ère chrétienne — à une époque, en tout cas, où la tradition des grands alexandrins était déjà obscurcie « il vise à créer une nouvelle tradition, et c'est en cela qu'il est original et novateur[2] ».

C'est un technicien et ses traités célèbres des *Pneumatiques* et des *Automates* décrivent d'ingénieuses machines mues par les forces physiques — sortes de jouets scientifiques. Son œuvre géométrique, qui peut être appréciée à sa juste valeur, depuis que (1896) le manuscrit des *Métriques* a été retrouvé à la bibliothèque du Sérail de Constantinople, est plus intéressante en ce qu'elle rapproche, ce qui est à peu près unique dans la science grecque, les spéculations théoriques et l'application. Héron, qui connaît assez bien l'œuvre des grands géomètres et qui prouve souvent une heureuse originalité dans ses démonstrations, y joint en effet des appli-

1. Qui reste d'ailleurs purement qualitative, et qui englobe, non seulement les mouvements proprements dits, mais tous les changements d'états. Il n'y a pas lieu d'y insister ici.
2. P. Tannery, *Œuvres*, III, p. 148.

cations numériques très soigneusement traitées. Il n'hésite point, après avoir traité de l'évaluation théorique des aires et volumes simples, à faire allusion aux procédés pratiques qui peuvent servir à mesurer surfaces et volumes de forme quelconque. Ailleurs, il prend avec l'Algèbre géométrique des libertés (comme de parler du produit de deux aires comme étant une aire) qui sont assez caractéristiques de la tournure heureusement utilitaire de son esprit.

L'Arithmétique de *Diophante* (entre + 150 et + 250 ?) a exercé une grosse influence sur le développement de l'Algèbre moderne et de la théorie des nombres; nous aurons à y revenir. Pour l'instant, il suffit d'indiquer que le traité en question est constitué par une collection de problèmes *numériques* qui dépendent en fait d'équations du premier ou du second degré, *déterminées* ou *indéterminées*. L'Algèbre géométrique ne joue jamais aucun rôle dans les solutions où n'interviennent jamais que des nombres rationnels et qui ne dégagent guère de méthodes générales. Diophante nous révèle ainsi, en marge de la Science classique, un courant de recherches — dont le niveau n'est sans doute pas très élevé — concernant des questions numériques telles qu'en pose la vie courante et des questions « d'arithmétique amusante »; recherches qu'il faut peut-être aussi rapprocher (en ce qui concerne les problèmes indéterminés à résoudre en nombre rationnels) d'une question déjà envisagée par les Pythagoriciens : trouver les carrés qui peuvent être décomposés en la somme de deux autres carrés. En analyse indéterminée, Diophante s'estime toujours satisfait lorsqu'il a obtenu *une* solution, parfois très particulière.

Le principal intérêt de son *Arithmétique* est de mar-

quer les débuts, fort timides, de l'algèbre symbolique: Diophante a des abréviations particulières pour désigner l'inconnue et ses puissances — pour des exposants compris entre — 6 et + 6; il a un signe particulier pour indiquer la soustraction et possède les éléments du calcul algébrique : réduction des termes semblables, passage d'un terme d'un membre à l'autre d'une équation. L'Algèbre des Arabes, que nous aurons l'occasion d'étudier dans le chapitre suivant, doit certainement beaucoup à Diophante.

CHAPITRE II

De Diophante à Francois Viète : Développement de l'algèbre symbolique; les sciences exactes au Moyen-âge.

---

§ 1. Sources grecques et indiennes dans la Science arabe ; aperçu sur les mathématiques indiennes.

Au Moyen-Age, il subsiste encore, dans l'Empire Byzantin, une certaine activité scientifique, qui a été longtemps méconnue et qu'il serait injuste de ne point signaler. Mais nous n'avons pas à y insister ici, parce que c'est surtout par l'intermédiaire des *Arabes* que la science grecque a pu se répandre dans l'Europe occidentale. L'œuvre des Arabes tire d'ailleurs un intérêt particulier de ce qu'elle ne représente pas seulement des traditions helléniques, mais procède aussi, à ses débuts, d'influences indiennes. Dans quel sens s'exercèrent ces influences? Quelle portée doit-on leur attribuer? Pour répondre à ces questions, il faut retracer brièvement le développement que prirent dans l'Inde les Sciences exactes et tout particulièrement l'*Arithmétique*.

Nous connaissons la Science indienne par des traités concernant surtout l'Astronomie (et bien entendu l'astrologie) mais où interviennent aussi des développements de mathématiques pures. On

peut ainsi citer les ouvrages de Aryabhatta (né en + 476), de Brahmagupta (+ 598) et un traité anonyme du ɪvᵉ ou vᵉ siècle : Sûrya Siddhânta, « la sagesse du Soleil »; plus tard le Siddhântaçiromani *de Bhàskara Acàrya* (né vers 1150) contient deux chapitres particulièrement intéressants : Lilâvatî, c'est-à-dire la séduisante (c'est l'arithmétique qui est ainsi qualifiée !) et Vijaganita, ce qui veut dire, calcul des racines.

Il n'y a pas lieu d'insister beaucoup sur les connaissances géométriques (ou même astronomiques) des Hindous. Elles proviennent de sources grecques — les relations entre l'Inde et le monde hellénique ayant été assez suivies depuis l'expédition d'Alexandre —, — mais les mathématiciens de l'Inde n'ont aucun goût pour la rigueur et un résultat géométrique leur paraît très suffisamment justifié par une figure ou une application numérique. Ils ont en revanche une étonnante virtuosité dans le maniement des nombres; leur Arithmétique et leur Algèbre se développent ,de façon tout à fait *autonome* et c'est par elles qu'ils ont pu exercer, au moment où s'élaborait la science arabe, une influence — moindre assurément que celle des Grecs — mais très notable et dirigée dans un sens bien différent.

On doit d'abord aux mathématiciens indiens — *nous leur devons* —, le système actuel de numération écrite, où la position des chiffres leur assigne leur valeur; le symbole *zéro* qui y joue un rôle essentiel, apparaît déjà dans le *Sûrya Siddhânta* et les procédés de calcul des Hindous sont, à quelques détails près, ceux dont nous usons encore.

Il faut noter aussi l'emploi fait, par les calculateurs indiens de quantités négatives : ils ne les

admettent point, en général, comme *résultats* et rejetteront donc les racines négatives[1], mais ils n'auront aucun scrupule à les envisager dans des calculs intermédiaires. Bhâskara remarque ainsi que, d'après la règle des signes, la racine carrée d'un nombre positif a deux déterminations et il en conclut les *deux* racines, qui ne l'intéressent qu'autant qu'elles sont positives, d'une équation du second degré. Le même auteur envisage (après Brahmagupta) les fonctions de dénominateur nul et les explique comme représentant l'infini; il en fait d'ailleurs un étrange abus, posant par exemple le problème suivant : « On ajoute à un nombre son quotient par zéro et l'on retranche 9; on ajoute au résultat obtenu son carré; enfin, en multipliant par zéro, on obtient 90. Quel est le nombre ?[2] »

Les œuvres scientifiques des Indiens sont généralement versifiées et le plaisir raffiné qu'ils trouvent aux *jeux sur les nombres* s'y traduit dans la forme souvent charmante des énoncés. Ce lyrisme arithmétique s'épanouit pleinement dans l'ouvrage de Bhâskara. En voici un exemple emprunté à un auteur antérieur, *Çridhara* : « Du collier préféré « s'échappe un rang de perles. Le sixième d'entre « elles est tombé sur le sol, le cinquième est resté « sur la couche; la jeune fille en a sauvé le tiers; « le bien-aimé en retenait le dixième; six perles sont « encore au fil. Dis-moi, combien étaient-elles ? »

Les Indiens peuvent traiter ces problèmes numériques par des procédés arithmétiques qui se résument

1. On trouve pourtant, dans des cas simples, l'interprétation de telles racines.

2. C'est $x = 9$. En effet $\frac{x}{0} + x - 9$ est toujours $\frac{x}{0}$, le carré $\frac{x}{0}^2$ et la multiplication par zéro donne $x^2 + x = 90$ qui admet bien la racine 9 !!

en un certain nombre de règles : *règles de trois* (qui apparaissent dans Aryabhatta) ; *inversion*, la solution s'obtenant en reprenant, en sens inverse, les calculs qu'indique l'énoncé, règles de *fausse position* ou *d'interpolation*. Ils développent aussi une algèbre, dont nous trouvons un exposé dans le *Calcul des racines* des Bhâskara, et qui, en ce qui concerne les abréviations usitées pour représenter les inconnues et leurs puissances, est plus compréhensive que celle de *Diophante*, dont il faut la rapprocher.

Dans les problèmes d'analyse indéterminée, ils vont aussi plus loin que Diophante, recherchant des solutions entières (et non pas seulement rationnelles). C'est ainsi que dans l'équation du premier degré $ax—by=c$, ils utilisent sensiblement les calculs qui nous servent à traiter cette équation au moyen des fractions continues. Leurs résultats concernant des équations du second degré (équation de Pell : $y^2 = ax^2 + 1$) sont également notables.

Pour toutes ces questions, il s'agit, non point de développements théoriques, mais de solutions résultant sans doute d'heureux tâtonnements et que justifie seulement une longue pratique. On voit combien nous sommes loin de la rigueur théorique des Grecs et qu'il n'était point indifférent, pour le développement ultérieur de la science, que puissent se rapprocher des points de vue aussi divers. Le rapprochement s'effectue chez les Arabes, mais sans porter immédiatement de fruits. Bien qu'on ait pu s'illusionner à leur sujet, à une époque où la science indienne était encore méconnue, les Arabes n'apportent, dans leur œuvre scientifique rien qui leur soit propre. Mais ils assimilent ce qui leur venait d'autres peuples et leur rôle historique est d'impor-

tance : ils ont servi de trait d'union, entre la Grèce et l'Inde d'une part, l'Europe occidentale de l'autre

§ 2. La Science arabe

En 755, 123 ans après la mort de Mahomet, le khalife Almansûr, second de la dynastie des Abbassides, donne à l'empire arabe une nouvelle capitale, Bagdad, qui devient rapidement un centre commercial et intellectuel très important. C'est à Bagdad, et sous le règne de ce prince et de ses successeurs, particulièrement Hârûn Arraschid et Almamûn, que commence le développement de la science arabe.

Les relations commerciales avec l'Inde, aisées par le golfe Persique et le port de Bassora, à l'embouchure de l'Euphrate, amenèrent à la connaissance des Arabes le calcul et l'astronomie indienne. Bien avant la fin du VIIIe siècle, il existait probablement des versions arabes des traités d'Aryabhatta et de Brahmagupta.

Les premiers ouvrages grecs traduits sont, sans doute, des ouvrages de médecine. Mais dès le temps d'Arraschid sont faites les premières traductions de Ptolémée et d'Euclide et, un peu plus tard, celles des traités d'Apollonius, Archimède, Héron et Diophante. Les éléments principaux de la science arabe se trouvaient ainsi réunis vers la fin du IXe siècle.

On retrouve côte à côte dans l'algèbre arabe, sur laquelle nous dirons maintenant quelques mots, méthodes grecques et méthodes indiennes. Les deux tendances sont représentées dans l'œuvre de Mohammed ibn Mûsâ Alkhwarismi, qui vécut au temps du khalife Almamûn et qui est le premier et l'un des plus illustres mathématiciens arabes.

Son arithmétique, dont nous ne possédons qu'une traduction latine, expose le calcul indien; le nom d'*Algorithme* qui dérive par déformation de *Alkhwarismi*, désignera en Occident ce calcul, avant de prendre de nos jours un sens plus large. Son algèbre « Aldschebr walmukâbala » représente des tendances grecques : les solutions d'équations de second degré y sont justifiées par des constructions géométriques. Mais Mohammed ibn Mûsâ connaît les deux racines de l'équation : $x^2 + a^2 = bx$; il traite des problèmes pratiques. Le titre de l'ouvrage désigne les deux opérations préliminaires à toute résolution d'équations : *dschebr* consiste à faire passer des termes d'un membre dans l'autre de l'équation de façon à n'avoir, dans chaque membre, que des termes positifs; *mukâbala* désigne la réduction des termes semblables faite de façon que l'équation ne contienne plus, finalement, qu'un terme positif de chaque degré.

Au début du XIe siècle, on peut constater, dans le traité de calcul d'*Alnasawi*, les progrès réalisés dans l'usage du calcul indien. A la même époque *Alkarchî* qui se rattache plutôt à la tradition hellénique, montre déjà comment le sens de la rigueur peut s'allier, dans le maniement des irrationnelles, à des formes plus souples que celles de l'algèbre géométrique grecque; c'est en somme le début d'une évolution très lente qui finit par éliminer, dans l'arithmétique et l'algèbre arabe, les représentations géométriques, tandis que se développe le symbolisme.

Omar Alkhaijâmi, au contraire, s'en tient aux strictes conceptions des Grecs. Dans l'œuvre de ce

dernier savant — poète philosophique et mathématicien — il faut mentionner l'étude des équations cubiques, leur solution géométrique par l'emploi des sections coniques et leur classification : c'est là une question qui appartenait déjà au domaine de la science grecque et à laquelle les Arabes ont consacré de nombreux travaux, étudiant aussi divers problèmes géométriques qui en dépendent : celui de la trisection de l'angle, par exemple.

Nous terminerons cette revue, fort rapide et très incomplète, de l'activité scientifique des Arabes, en exposant ce que fut leur Astronomie. Elle est entièrement dominée par l'Astrologie qui ne prétend point seulement lire l'avenir dans les astres, mais qui doit encore assurer le succès de toute entreprise, lorsque l'on sait choisir, pour la mettre à exécution, l'instant où les apparences des planètes sont le plus favorables. La libéralité *intéressée* des Sultans assure donc l'entretien de nombreux observatoires où se dépense, à suivre le mouvement des corps célestes et à établir des éphémérides, une activité considérable.

Le bilan en reste assez mince. Les Arabes perfectionnent peut-être le matériel d'observation; ils le compliquent surtout, car leur idéal n'est point du tout la *spécialisation* qui est de règle dans la technique moderne. Au point de vue théorique, le système de Ptolémée répond à tous les besoins et il n'y a point à insister sur les tentatives pour traduire objectivement *excentriques* et *épicycles*. Quelques particularités nouvelles des mouvements célestes sont reconnues : c'est ainsi que, vers la fin du IXe siècle, Al Bâttâni reconnaît le déplacement de l'apogée du soleil. En trigonométrie enfin, nous avons dans

un ouvrage de Nasîr Eddîn (1201-1274), un exposé d'ensemble qui garde, sans aucun symbolisme, les méthodes géométriques de l'Almageste[1].

Les progrès les plus notables concernent les tables trigonométriques : ce ne sont plus des tables de *cordes*, mais, suivant un usage préférable qui passe des *Indiens* aux *Arabes*, elles donnent directement des *sinus*. Leur précision est accrue : les tables qu'établit Abûl Wafa, qui vécut à Bagdad au xe siècle donnent ainsi les sinus des arcs de 10 en 10 minutes, avec une précision de $\frac{1}{60^4}$ et le même Abûl Wafa établit aussi, ce qui doit contribuer à simplifier beaucoup les calculs trigonométriques, la première table des tangentes.

On voit que dans l'ensemble, et nous venons d'en indiquer un nouvel exemple, la Science arabe, inspirée de la Science grecque, n'y apporte de complément intéressant qu'en tant qu'elle y amalgame *l'art du calcul* que les calculateurs indiens avaient poussé à un si haut degré.

§ 3. Les origines de la Science occidentale

A l'époque où les mathématiques grecques commençaient à se répandre dans le monde musulman, les peuples de l'ancien Empire romain d'Occident n'avaient, bien certainement, que les connaissances scientifiques les plus rudimentaires, et la réorganisation de l'enseignement, réalisée par Charlemagne,

1. Parmi les résultats théoriques dus aux Arabes on peut citer : le théorème de proportionnalité des sinus des angles à ceux des côtés opposés, dans un triangle sphérique, théorème remontant à *Abûlwafâ*, et, dans l'ouvrage de Nasîr Eddîn, les premières applications de la notion de triangle *polaire* ou *supplémentaire* d'un triangle donné.

améliore au fond *fort peu* cet état de choses. La « Renaissance carolingienne » qui marque l'origine de la philosophie médiévale, n'est guère intéressante pour l'histoire des Sciences : nous ne trouvons, à cette époque, aucun témoignage d'activité scientifique qui puisse être comparé — même de fort loin — à l'œuvre philosophique d'un *Jean Scot Erigène*, œuvre où se renouaient les traditions néoplatoniciennes.

Les traditions de la Science hellène ne devaient être retrouvées que beaucoup plus tard. Il n'y a là rien de bien surprenant. Nous allons voir que les maîtres des écoles carolingiennes ne pouvaient pas tirer, des œuvres *latines* qui leur étaient seules immédiatement accessibles, les éléments d'une culture scientifique.

Les Romains avaient eu, en effet, un esprit trop utilitaire pour s'attacher beaucoup à l'étude des mathématiques pures. Ils se limitent aux questions dont l'intérêt leur apparaît comme immédiat : calcul et arithmétique élémentaire, géométrie pratique et arpentage, art de l'ingénieur. Ils ont eu, à cet égard, des traditions indigènes, qui remontaient peut-être à des sources étrusques. Plus tard, ils subissent des influences grecques — celle surtout de Héron d'Alexandrie — mais ces influences restent *en surface* même pendant la période de César à Trajan, où elles sont le plus marquées. Après Trajan, la littérature mathématique romaine accuse une très nette décadence. Pour préciser le peu qu'y pouvaient puiser les contemporains de Charlemagne, il suffira de donner quelques indications sur les œuvres attribuées à *Boëce* (Anicius Manlius Severinus Boethius ; 480 à 542) qui eut, au Moyen-âge, une grande célébrité.

L'arithmétique de Boëce s'inspire d'un ouvrage d'enseignement fort prisé à la fin de l'Antiquité, l'Εἰσαγωγὴ ἀριθμητική qu'écrivit, sur la théorie des nombres, vers le début du second siècle, *Nicomaque de Gérasa*. Nicomaque est un mathématicien fort médiocre et ne s'embarrasse pas de démonstrations rigoureuses. Cela a pu contribuer au succès de son livre, qui dépasse pourtant, dans sa médiocrité, les aptitudes mathématiques du temps : l'adaptation qu'en fait Boëce laissera de côté toutes les questions un peu délicates.

La géométrie dite de Boëce n'atteint pas un niveau plus élevé : après un choix *d'énoncés*, tirés des éléments d'Euclide, nous y retrouvons, dans les nombreuses applications numériques, les connaissances et les formules — parfois grossièrement erronées — des agrimenseurs romains.

On ne s'étonnera donc point des faibles progrès réalisés jusqu'au moment où, au XIIe siècle, les ouvrages arabes commencent à être connus en Europe. Dans le *Quadrivium* mathématique (arithmétique, géométrie, musique et astronomie), l'arithmétique pratique seule pouvait être convenablement enseignée. On calculait sur l'*abaque* (déjà utilisée par les Grecs et les Romains) où des colonnes correspondent aux diverses unités décimales, le nombre de ces diverses unités étant représenté par des jetons; c'est le boulier-compteur de notre enfance.

Un perfectionnement notable, d'origine incertaine, fut répandu par *Gerbert*[1] : les jetons utilisés

1. Gerbert, né vers 950, près d'Aurillac, passa dans sa jeunesse 3 ans en Espagne où il put avoir quelques aperçus de la science arabe. Il dirigea l'école de Reims où son enseignement exerça une grande influence, fut élu pape sous le nom de Sylvestre II en 999 et

portent 9 signes distincts correspondant aux chiffres de 1 à 9 — ou bien encore, on supprime les jetons en inscrivant ces chiffres dans les colonnes de l'abaque. Avec cette dernière modification, nous sommes tout près du calcul indien ou *algorithmique* et il ne reste, comme différence essentielle entre les deux méthodes que l'emploi du zéro, qui permet d'abandonner le tableau divisé en colonnes. De cela il n'est pas encore question.

Pour montrer, par contre, quel était au XIe siècle, l'ignorance en géométrie, on ne saurait choisir un meilleur exemple que la correspondance, publiée par P. Tannery[1], de deux maîtres (écolâtres) de ce temps : Radolfus de Liège et Ragimboldus de Cologne. L'une des questions traitées concerne la proposition suivante d'Euclide : la somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits. Il ne s'agit pas, comme le lecteur serait tenté de le croire — de démontrer ce théorème, mais seulement de comprendre son énoncé : angles intérieurs ? qu'est-ce à dire ? et y a-t-il donc des angles extérieurs ? Par d'habiles et savants arguments, Ragimboldus fait prévaloir l'opinion que *intérieurs* et *extérieurs* sont synonymes d'*aigus* et *obtus* !

Nous avons fait allusion, au début de ce paragraphe, au mouvement philosophique qui se développe dès l'époque carolingienne. La philosophie avait, dans l'interprétation du dogme chrétien, un riche et passionnant sujet d'études et, d'autre part, elle trouvait, profondément marquée, « dans la formule

mourut en 1003. C'est une des personnalités les plus marquantes de son époque et sa *Géométrie* dépasse beaucoup les connaissances de ses contemporains.

1. *Œuvres,* t. V, p. 229-303.

même de ce dogme et le commentaire merveilleusement abondant qu'en ont donné les Pères, l'empreinte de la pensée grecque[1] »; aussi sera-t-elle, durant tout le Moyen-âge, fort en avance sur la spéculation scientifique.

Et ce fut sans doute très heureux. Les grandes œuvres de la Science grecque se révélèrent ainsi — notablement plus tard — à des esprits mûris, rompus par l'enseignement philosophique à toutes les finesses du raisonnement, soutenus par une tradition intellectuelle déjà longue. Les maîtres d'Occident pouvaient se remettre à l'école d'Archimède et d'Apollonius; ils restaient des maîtres et leur pensée, pour s'être assouplie en des exercices très différents, n'était pas moins sûre que celle des grands Alexandrins.

La rigueur de la géométrie grecque, dont les savants du Moyen-âge ont perdu le secret, se retrouve, par un détour singulier, dans la pensée philosophique. A qui en douterait, on pourrait donner en exemple, dès ce même XIe siècle où nous sommes, la perfection quasi-mathématique que prennent, avec saint Anselme de Cantorbéry, les démonstrations augustiniennes de l'existence de Dieu. Je résume ici le troisième argument, qui porte sur les degrés de perfection que possèdent les choses[2] : « Il suffit de « jeter un coup d'œil sur l'univers pour constater « que les êtres qui le constituent sont plus ou moins « parfaits. Donc ou bien il existe une infinité d'êtres « et l'on ne rencontre jamais d'être si parfait qu'il « n'y en ait un plus parfait encore, ou bien il y a

1. Gilson, *La philosophie au Moyen-âge*, p. 5.
2. D'après Gilson, *loc. cit.*, p. 45.

« un nombre fini d'êtres et par conséquent un être
« plus parfait que tout le reste. Or la première hypo-
« thèse est absurde, il existe donc nécessairement
« une nature telle qu'elle soit supérieure aux autres
« sans être inférieure à aucune. Reste, il est vrai,
« l'hypothèse de plusieurs natures égales situées
« au sommet de la hiérarchie universelle. Mais si
« elles sont égales, elles le sont par ce qu'elles ont
« en commun, et si ce qu'elles ont en commun est
« leur essence, elles ne sont en réalité qu'une seule
« nature; et si ce qu'elles ont en commun est autre
« chose que leur essence, c'est donc une autre nature,
« supérieure à elles, et qui est donc à son tour plus
« parfaite que toutes. »

Si l'on fait, pour un instant, abstraction du fond, on jugera que ce morceau n'est pas inférieur à la plus parfaite démonstration par exhaustion; ou plutôt on fera le rapprochement avec les raisonnements qu'utilise l'une des branches les plus récentes de l'analyse mathématique : la théorie des ensembles — et n'est-ce pas, d'ailleurs, une question de théorie des ensembles que traite saint Anselme?

Parce que la réflexion philosophique use, anéantit parfois la substance où elle s'exerce, nous pouvons avoir l'impression que la machine scolastique a tourné souvent à vide. Ce furent, sur une matière tendre, les essais nécessaires à la parfaite mise au point de rouages dont la puissance, et la précision, n'étaient certes pas inutiles pour mettre en œuvre le marbre de la science hellène.

Dans le monde musulman la philosophie et la science grecque furent assimilées *synchroniquement*. Voilà peut-être une des raisons pour lesquelles les Arabes sont restés, au point de vue scientifique,

des *commentateurs*. Il n'est pas absurde de penser que, si les érudits carolingiens avaient pu avoir à leur disposition, l'œuvre des savants grecs, l'originalité de la science occidentale, de notre science, se serait trouvée fort compromise : on suivait d'abord péniblement le modèle, et plus tard, les traditions de l'enseignement eussent lourdement pesé sur toute démarche libre de la pensée. Il est advenu au contraire que, au XVIe et au XVIIe siècle, des hommes, dont la formation était surtout philosophique, purent en face des œuvres grecques garder toute leur originalité. Ces hommes avaient d'ailleurs appris que, dans les plus parfaites constructions déductives, il faut parfois revenir jusqu'aux principes pour remanier profondément le plan général; nous avons déjà dit comment, ayant méconnu cette nécessité, la Science grecque avait été étouffée, par son développement même.

Tout cela nous a entraîné fort loin du XIe siècle, mais une digression était nécessaire pour dégager, sous l'insuffisance des résultats scientifiques, le véritable intérêt de l'œuvre médiévale.

§ 4. Influences arabes en Europe
Les Sciences exactes du XIIe au XVe siècle.

Les études scientifiques prennent un certain développement à partir du XIIe siècle parce que, à cette époque et d'abord par l'intermédiaire des Ecoles maures d'Espagne, les ouvrages arabes parviennent à l'Occident latin.

Parmi les traducteurs de ces ouvrages, il faut d'abord citer le moine anglais *Adelhart de Bath*,

grand voyageur, qui passa en Asie-mineure, en Egypte, en Espagne, et qui rapporta de Cordoue la première traduction latine (d'après le texte arabe[1]) des *Eléments* d'Euclide (vers 1120). Adelhart traduisit aussi les tables astronomiques de Alchwarismi, et, peut-être, l'arithmétique du même auteur. Un centre d'études se constituait peu après en Espagne chrétienne, à Tolède, sous l'impulsion de l'archevêque Raymond. Un juif converti, Jean de Luna, y composait un traité d'Algorithme; c'est à Tolède que *Gerhard de Crémone* (1114-1187) qui dépensa à des traductions une activité considérable, venait retrouver les éditions arabes de l'Almageste. La pensée musulmane rayonnait d'ailleurs directement (surtout en ce qui concerne l'Astronomie et l'Astrologie) jusqu'aux écoles du Midi de la France.

Il ne faudrait pourtant pas exagérer l'influence du mouvement que nous venons d'esquisser sur le niveau général de l'enseignement mathématique des Universités, qui s'organisent au XIIIe siècle[2]. Les progrès sont fort lents, en géométrie surtout, où l'on s'attache plus aux traditions latines de Boëce, à la géométrie de Gerbert, qu'aux *Eléments* révélés par Adelhart. Pour le développement de l'arithmétique et de l'algèbre, les relations commerciales dont l'Italie était le centre, jouent un rôle peut-être prépondérant, comme nous le verrons dans un instant Reste à signaler, au XIVe siècle, les intéressantes spéculations, concernant la mécanique, qui sont dues à des maîtres de l'Université de Paris[3].

1. Le texte grec ne fut connu qu'en 1553.
2. L'Université de Paris, dès 1150.
3. A ce sujet, on se reportera aux travaux de Duhem, en particulier, *Etudes sur Léonard de Vinci*, 3e série.

Jean Buridan[1] s'élève contre l'explication donnée par Aristote du mouvement des projectiles. Ayant posé en axiome la nécessité d'une *puissance motrice*, continuellement appliquée au mobile, pour en entretenir le mouvement[2], Aristote se trouvait en assez fâcheuse posture pour expliquer comment, lorsqu'on lance une flèche, elle continue de voler après avoir quitté l'arc; c'est, disait-il, l'air ébranlé (par la main ou par l'appareil moteur) qui soutient la flèche et est cause de son mouvement. Après avoir réfuté cette extraordinaire conception, qui fut, quelque incroyable que cela puisse paraître, à peu près universellement adoptée dans l'antiquité et au Moyen-âge, Buridan reprend une idée émise — sans succès — par un commentateur ancien du Stagirite[3] : l'arc communique à la flèche un *impetus* (une énergie) proportionnel à la masse et qui explique son mouvement. Et Buridan voit justement dans l'accélération des graves l'*addition des impetus*.

Buridan a de nombreux disciples : *Albert de Saxe*, *Nicolas Oresme*, *Nicolas de Cues* et *Dominique Soto* par l'intermédiaire desquels la Doctrine de l'impetus passera aux fondateurs de la Mécanique moderne. Oresme (1323-1382) est le plus marquant. Il admet le mouvement de rotation de la terre, et par des exemples de composition de mouvements, montre comment on peut répondre à l'objection d'après laquelle une pierre lancée verticalement, devrait retomber plus à l'Ouest. On lui doit aussi, dans son *Algoritmus proportionum*, l'introduction des exposants fractionnaires pour représenter les radicaux;

1. Recteur de l'Université de Paris, 1327.
2. Cf., *supra*, p. 38.
3. Jean Philopon, qui vivait au VIIe siècle.

dans d'autres ouvrages, il introduit les coordonnées pour les représentations graphiques et se pose ainsi en précurseur de *Descartes*, le fondateur de la Géométrie analytique.

Nous reviendrons maintenant en arrière pour donner quelques indications sur les progrès de l'Algèbre à la fin du Moyen-âge. Il faut tout d'abord rappeler qu'il y avait, à partir du XIIe siècle, d'autres points de contact que l'Espagne, entre la chrétienté et le monde musulman. Le XIIe siècle est l'époque des croisades qui ne furent point seulement des expéditions religieuses, mais aussi, « un grand mouvement de commerce et de colonisation ». Les républiques maritimes italiennes en bénéficièrent et, à la faveur des relations établies, se vulgarisait tout naturellement, en Italie, le calcul algorithmique et l'algèbre arabe.

L'importance de ces influences s'affirme par l'œuvre de *Léonard de Pise*, qui écrivit vers 1200, l'un des plus importants traités de calcul du Moyen-âge, le premier où se révèle quelque originalité.

Le père de Léonard était attaché commercial, — peut-on dire —, aux Etablissements pisans de Bougie et il fit venir son fils auprès de lui, pour lui donner un maître de calcul. Plus tard, au cours de multiples voyages — voyages d'affaires bien probablement — dans tout le monde méditerranéen, Léonard sut trouver l'occasion d'acquérir des connaissances scientifiques très étendues et il en fait part à ses contemporains dans ses ouvrages : le *Liber Abaci* (d'abord intitulé *Algebra et Almuchabala*) et la *Practica geometriae* (vers 1220). Ce sont là des œuvres fort remarquables, dont l'auteur n'est point seulement très versé dans le calcul arabe ou hindou,

en tant qu'il peut servir à des fins pratiques; il est mathématicien, donne des démonstrations (qui prennent généralement la forme géométrique), il a parfaitement assimilé les résultats essentiels de la théorie des nombres, de l'algèbre et de la géométrie, et il sait en tirer parti.

De ces singulières aptitudes nous avons un témoignage frappant : les solutions données par Léonard à des problèmes qui lui furent posés, en présence de l'empereur Frédéric II[1], au cours d'une sorte de tournoi scientifique (analogue à ceux qui furent si à la mode dans l'Italie du XVIe et du XVIIe siècle). L'un des problèmes concernait l'équation cubique :

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Léonard montre que la solution ne peut être rationnelle, ni l'une des irrationnelles qu'étudie Euclide dans son Xe livre, et il en donne la valeur numérique :

$$1 \quad 22' \quad 7'' \quad 42''' \quad 33^{IV} \quad 4^{V} \quad 40^{VI}$$

(en fractions sexagésimales) avec une erreur moindre que $1 \; 1/2^{\,VI}$.

C'est seulement trois siècles plus tard que nous aurons à enregistrer, avec les algébristes italiens du début du XVIe siècle, des œuvres qui dépassent, par leur portée, celle de Léonard. Dans l'intervalle, il y a pourtant à signaler quelques mathématiciens marquants.

Un contemporain de Léonard de Pise, Jordanus Nemorarius écrivit de nombreux ouvrages mathématiques fort répandus. Sa personnalité reste incertaine, bien qu'on puisse probablement l'identifier

1. C'est ici le lieu de rappeler la brillante cour italienne de Frédéric Hohenstaufen et l'intérêt qu'y excitait la culture, et en particulier la science, arabe.

avec Jordanus Saxonis, qui enseigna à Paris et fut supérieur des Dominicains. Dans ses ouvrages, nous rencontrons pour la première fois l'emploi systématique des lettres pour représenter des nombres arbitraires.

Nous avons déjà cité l'*Algorismus demonstrandus* d'Oresme, où apparaissent les exposants fractionnaires, ce qui est un pas vers l'introduction des logarithmes. D'autres progrès dans la même direction sont réalisés par un autre Français, *Nicolas Chuquet*, qui possède, pour les puissances (même négatives) de l'inconnu, des notations où apparaît la valeur numérique de l'exposant, qui d'autre part envisage parallèlement, dans un cas particulier, progression arithmétique et progression géométrique L'ouvrage de Chuquet : *Triparty en la science des nombres*, est d'ailleurs intéressant à d'autres égards : il faut au moins noter l'aisance avec laquelle y sont maniées les quantités négatives

Le livre imprimé se répand à la fin du XVe siècle. Parmi les premiers ouvrages mathématiques qui, grâce à l'*imprimerie*, purent avoir une diffusion plus grande, figurent : une arithmétique pratique, dite de Bamberg (Nüremberg, 1483), le traité de Jean Widmann d'Eger[1], où se réunissent pour la première fois nos signes + et —, enfin, surtout, la *Summa de Arithmetica, Geometria, proportioni et proportionalita* de *Luca Paciuolo*, moine franciscain, né à Borgo San Sepolcro, dans la haute vallée du Tibre, mort vers 1515, qui enseigna dans de très nombreuses cités italiennes et fut, suivant le mot de Cantor : un maître-voyageur ès sciences mathématiques.

1. *Behende und hubsche Rechnung auf allen Kamfmannschaft*, Imprimé en 1489, réédité en 1508, 1519, 1526.

Son ouvrage fondamental, dont nous venons de rappeler le titre, fut imprimé à Venise. C'est un exposé d'ensemble — sans originalité — des connaissances mathématiques en cette fin du xve siècle. Mais il venait au moment opportun, fut très répandu et donnait une base solide pour des progrès ultérieurs.

§ 5. L'Algèbre au XVIe siècle.

Avec le xvie siècle commence une nouvelle période de l'histoire des Sciences : pour la première fois les savants d'Occident vont dépasser nettement — surtout en Algèbre et en Astronomie — leurs maîtres grecs et arabes.

Le développement de l'Algèbre présente une grande continuité et les nouveaux résultats acquis (résolution des équations du degré 3 et 4) couronnent très naturellement l'effort des siècles précédents. Aussi, avant de clore ce chapitre, donnerons-nous un aperçu sommaire des progrès de cette science jusqu'à l'époque où, avec Viète, elle atteint presque sa forme moderne et où la recherche mathématique va s'exercer dans d'autres directions.

Le pas décisif, nous y avons déjà fait allusion, fut la résolution des équations cubiques et quadratiques, obtenue par les travaux de l'école italienne si brillamment inaugurée par Léonard de Pise et qui se trouve au xvie siècle en tête du mouvement scientifique, avec des savants tels que Tartaglia et Cardan.

Nicolas Fontana, dit *Tartaglia*, c'est-à-dire le bègue, naquit à Brescia en 1500 de très humble extraction. Son père mourut en 1506 et sa mère resta sans ressources. Tartaglia fait donc preuve

d'une belle force de caractère et d'une singulière ténacité lorsqu'il s'élève à travers mille difficultés, à une situation notable (nous le trouvons, en 1535, professeur à Venise); mais son génie mathématique n'est point comparable à celui de son contemporain *Cardan*. Ce dernier (1501-1576), est un des esprits les plus remarquables de son temps. Universel dans ses connaissances, très original, mais assez déséquilibré, il eut une vie très agitée. A 22 ans, il enseigne les mathématiques à Pavie. Trois ans plus tard, il est reçu Docteur en médecine à l'Université de Padoue, et après quelques années, exerce à Milan. Il voyage, traversant l'Allemagne et la France, allant jusqu'en Ecosse et en Danemark. De retour en Italie, il passe comme professeur à Milan, à Pavie, puis à Bologne (1562). En 1570, toujours à Bologne, il fait de la prison pour dette. Libéré il doit quitter la ville, et finit à Rome, pensionné, à titre d'astrologue, par la Cour pontificale.

Après ces quelques indications biographiques, il faut dire comment se posait, au début du XVIe siècle, le problème de la résolution de l'équation cubique.

Nous avons déjà rencontré des problèmes qui conduisent à des équations de ce genre. Le premier, et le plus simple, est celui de la duplication du cube (qui dépend de l'équation $x^3 = 2$, c'est-à-dire de la détermination de la racine cubique de 2). Le problème de la trisection de l'angle est aussi (si l'on détermine par exemple les angles par leur sinus) un problème cubique. Les géomètres grecs, plus préoccupés de préciser géométriquement l'existence des solutions que de leur détermination pratique, trai-

taient de telles questions par intersection de sections coniques et nous savons que les Arabes les suivirent dans cette direction (cf. p. 48). Autre chose est, ayant une équation à coefficients numériques, de donner les valeurs numériques des racines. Dans le cas simple d'une équation binome $x^3 = b$, c'est le calcul d'une racine cubique, calcul que l'on sait effectuer au XVIe siècle. Dans le cas général on pouvait procéder par approximations et les bons mathématiciens allaient ainsi fort loin; nous en avons vu un exemple dans l'œuvre de Léonard de Pise (cf. page 59). D'autre part, rien n'est plus aisé que la formation d'équations ayant une racine, entière par exemple, donnée à l'avance. Cela ne présente d'ailleurs pas le moindre intérêt, mais cela fournissait, dans les *défis* entre mathématiciens, une foule de questions susceptibles d'embarrasser grandement l'adversaire, en l'absence d'une méthode générale.

On chercha donc une méthode générale, et les tâtonnements pouvaient aboutir assez aisément. Soit, par exemple l'équation

$$x^3 = px + q$$

ou posant $x = u + v$, elle s'écrit

$$u^3 + v^3 = (u + v)(p - 3\,uv) + q$$

Tout revient donc à la question fort simple de déterminer u' et v' (précédemment u^3 et v^3) connaissant leur somme q et leur produit $\left(\frac{p}{3}\right)^3$; l'équation proposée sera satisfaite par $x = \sqrt[3]{u'} + \sqrt[3]{v'}$; on la résout par racines cubiques.

Une solution de ce genre aurait été découverte, au début du siècle, par un professeur de Bologne, Scipion del Ferro, qui ne la publia pas. Elle fut

retrouvée par Tartaglia, à l'occasion d'un défi (1535) que lui avait adressé un élève de del Ferro, Antonio Fiore. Tartaglia n'était point non plus pressé de divulguer sa méthode; il la communiqua pourtant à Cardan, sur les vives instances de ce dernier et confiant en sa discrétion[1]. Or, en 1545, Cardan, qui avait eu dans l'intervalle connaissance des papiers de Del Ferro, publiait la solution dans son *Ars magna de Rebus algebraicis* où il donnait aussi des recherches personnelles et la solution, due à son élève Ferrari[2], de l'équation du 4e degré. En publiant à son tour son résultat, Tartaglia exprima son mécontentement et ce fut l'origine d'une vive discussion, dont Cardan paraît se désintéresser, mais où il est vigoureusement défendu par Ferrari. En 1547-48, six cartels et contre-cartels furent échangés et l'on convint finalement d'une réunion contradictoire, tenue à Milan et qui tourna court, Tartaglia s'étant dérobé — soit qu'il se sentît en infériorité, soit qu'il craignit la violente partialité d'un auditoire préparé par ses adversaires.

1. Comme échantillon de la littérature mathématique du temps, nous donnons ici les vers où Tartaglia résume sa règle.

Quando che'l cubo con le cose appresso
Se egualia à qualche numero discreto,
Trovan dui altri, differenti in esso.
Dopo terrai, questo per consueto,
Che'l lor prodotto sempre sia eguale
Al terzo cubo, delle cose neto.
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi, ben sottratti,
Varrà la tua cosa principale.
In el secondo, de cotesto atti,
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osserverai quest' altri contratti,
Dal numero farai due, tal' parti a volo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo ;
Delle quale poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi, insieme giunti
E cotal somma, sarà il tuo concetto ; etc.

Voici les explications nécessaires : Vers 1-2, la *cosa*, c'est l'inconnue x, il s'agit de l'équation $x3 + px = q$; vers 3, prendre $u-v = q$; vers 5-6 et $uv = (p/3)^3$; vers 7-9 x sera la différence des racines cubiques de u et v ; vers 10-11, pour l'équation $x3 = px + q$; vers 13, poser le nombre $q = u + v$; vers 14-15, avec $uv = (p/3)^3$; vers 18, et x sera la somme des racines cubiques de u et v.

2. 1512-1565.

La haute valeur mathématique de Cardan se révèle dans les compléments qu'il apporte à la découverte de Tartaglia : il sait, ainsi, tirer parti de la transformation des équations, l'utilisant par exemple à faire disparaître le terme en x^2 d'une équation cubique générale; il reconnaît dans des cas particuliers, les relations entre coefficients et racines; il signale enfin et étudie le cas dit *irréductible* de l'équation cubique : c'est le cas où, avec les notations de la page 63, on a $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$, et où, par suite intervient dans les expressions de u' et v' la racine carrée d'un nombre négatif (u' et v' sont des imaginaires). Cardan montre que ces difficultés dans l'application de la formule générale se présentent lorsque l'équation a 3 racines (réelles).

Il faut noter à ce propos que Cardan ose des calculs sur ces radicaux imaginaires. Il est suivi dans cette voie par le Bolonais *Raphaël Bombelli*, qui fit imprimer, en 1572, une Algèbre fort répandue et qui marque quelques progrès dans les notations. On doit ainsi à l'Ecole italienne du XVIe siècle le début d'une théorie, celles des nombres complexes ou imaginaires, dont l'importance ne devait être reconnue que beaucoup plus tard.

A la fin de ce siècle, et avec le Français Viète, l'algèbre atteint presque sa forme définitive.

Viète, né en 1540 à Fontenay-le-Comte en Bas-Poitou, fit ses études de droit à Poitiers et fut successivement avocat, conseiller au Parlement de Bretagne, maître des requêtes à Paris, enfin conseiller du Roi et fort apprécié de Henri IV.

Il est assez curieux de constater que, au XVIe et au XVIIe siècles, nombre de mathématiciens, et quelques-uns des plus grands, sont, ainsi que Viète, très

éloignés de la Science par leurs occupations professionnelles. Des hommes simplement cultivés consacrèrent de façon très fructueuse, tous leurs loisirs à la recherche scientifique : ce fut possible parce que la culture que donnaient les écoles ou universités, toujours dominée par la philosophie médiévale, était bien plus efficace que ne le laisse supposer la pauvreté des enseignements proprement scientifiques. Inutile de revenir ici sur des remarques déjà faites au § 3 de ce chapitre : l'enseignement scholastique pouvait admirablement former le raisonnement, il ne lui donnait pas une nourriture substantielle, que les esprits, mûris et libérés, cherchèrent ailleurs.

Dans l'œuvre de François Viète, se dégage d'abord, définitivement, le symbolisme algébrique. Les grandeurs sur lesquelles on opère sont systématiquement représentées par des lettres, consonnes pour les données, voyelles pour les inconnues; les puissances d'une inconnue sont désignées, par exemple, par *A* quadrat., *A* cubus, etc..., les signes + et — et la barre de fraction, ont leur signification actuelle, mais le signe = représente une différence absolue entre deux grandeurs, dont il importe peu que l'une ou l'autre soit la plus grande; les deux membres d'une équation sont séparés par le mot *aequatur*. Beaucoup de ces détails, n'appartiennent pas en propre à Viète, et il n'est même pas difficile de trouver dans des ouvrages antérieurs telle ou telle notation particulière plus avantageuse. Mais on lui doit entièrement la nette compréhension des avantages du calcul littéral et sa haute valeur mathématique lui permettait de justifier, aux yeux des contemporains, une orgueilleuse devise : à l'art analytique, c'est-à-dire l'algèbre, il ne peut échapper la solution d'aucun problème.

La théorie des équations algébriques est, aussi, remarquablement traitée par Viète : transformation des équations, décomposition en facteurs linéaires et, par suite, relations entre les coefficients et les racines (dont les cas particuliers avaient déjà été remarqués par Cardan). Il est vrai que Viète n'admet pas les racines négatives, mais on ne peut guère lui en faire le reproche quand on le voit envisager simultanément, très souvent, une équation et sa transformée en $-x$. Aussi serai-je porté à croire qu'il n'y a chez lui, à cet égard, nulle incompréhension mais seulement le désir de garder les pures traditions grecques. Traditionaliste, Viète l'est encore par la distinction qu'il fait entre nombre et grandeur et par le souci qu'il prend d'assurer l'homogénéité de ses formules.

Viète étudie le cas irréductible de l'équation du 3e degré en le ramenant à la trisection de l'angle. C'est ici le lieu de faire allusion à ses recherches concernant la trigonométrie, qui sont importantes. Viète connaît ainsi l'expression générale du sinus d'un angle en fonction des lignes de l'angle $\frac{a}{n}$. Aussi, dans une certaine équation du 45e degré proposée, en 1593, par le Hollandais Van Roomen à la sagacité de tous les mathématiciens du monde, reconnaît-il immédiatement l'équation dont dépend la division d'un angle en 45 parties égales, et il indique, non point comme Van Roomen, une solution particulière mais toutes les racines positives.

Nous donnerions une idée bien incomplète du génie de Viète si nous n'ajoutions qu'il a été aussi bon géomètre que bon algébriste. Il ne sépare d'ailleurs point les deux sciences et envisage systéma-

tiquement les constructions qui s'appliquent aux diverses catégories de problèmes algébriques. Il établit, entre le cercle et le carré inscrit, une relation qui donne la première évaluation de π comme produit infini[1]. Il connaît bien les écrits des géomètres grecs et en particulier d'Apollonius; l'un de ses plus importants ouvrages géométriques[2] concerne le problème des cercles tangents (mener un cercle tangent à 3 cercles donnés), problème traité par Apollonius dans un écrit perdu περὶ ἐπαφῶν et dont Viète donne la première solution par la règle et le compas, introduisant à ce propos la notion de centre de similitude de deux circonférences.

1. C'est la formule

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots\cdots$$

2. Intitulé *Apollonius Gallus seu exsuscitata Apollonii Pergaei* περι επαφων *geometria*.

CHAPITRE III

Les progrès des sciences exactes jusqu'à Newton

§ 1. Astronomie et Mécanique; Copernic, Képler, Galilée.

Nous avons déjà dit que le XVIe siècle marque les débuts de la science moderne et l'on vient de voir tout l'intérêt des progrès réalisés, à ce moment, par l'Algèbre. Le développement que prennent alors l'Astronomie, puis la Mécanique, n'est pas moins remarquable et il faut y insister maintenant. Ce sera l'objet du présent paragraphe, qui embrasse la période — un siècle — comprise entre la publication de l'ouvrage fondamental de *Copernic*[1] et la mort de *Galilée*. Nous aurons ainsi l'occasion de compléter un peu le tableau général de l'activité scientifique, au XVIe siècle. L'œuvre de Képler, celle de Galilée, qui donne à la Mécanique de solides bases théoriques et expérimentales, nous introduiront enfin en plein XVIIe siècle.

L'Astronomie, et bien entendu aussi l'Astrologie, était assez en faveur, au début de la Renaissance, dans

1. *De revolutionibus orbium cœlestium* publié à Nûremberg, en 1543, l'année même de la mort de Copernic, 2 ans avant l'*Ars Magna* de Cardan.

les pays de l'Europe centrale. On peut citer, avant Copernic, *Georges Pürbach* (1423-1461) et son élève *Jean Müller* de Kœnigsberg plus connu sous le pseudonyme de *Regiomontanus*[1] (1436-1476) qui firent des observations et purent contribuer au perfectionnement des instruments, qui publièrent des tables astronomiques ou trigonométriques. Une théorie des planètes, de Pürbach, sorte d'introduction à la lecture de Ptolémée, fut souvent reproduite et commentée. Regiomontanus qui n'a pas été seulement un astrologue convaincu, mais un mathématicien et un astronome très éminent, écrivit un traité de trigonométrie plane et sphérique : *De triangulis omnimodis libri quinque.* Il est familier avec les œuvres des Grecs et des Arabes et paraît avoir eu quelque conscience des insuffisances de leur astronomie. Il est ainsi le premier à remarquer que la théorie de la lune de Ptolémée, néglige et contredit les indications que l'on peut tirer du diamètre apparent de cet astre. Il se promettait d'améliorer les vieilles tables *alphonsines* publiées en 1252 par l'ordre d'*Alphonse*, roi de Castille, d'après celles des astronomes arabes. Une mort prématurée — il fut assassiné à Rome où il avait été appelé par Sixte IV qui voulait le charger de l'amélioration du calendrier — l'empêcha peut-être d'apporter une contribution efficace à la réforme de l'Astronomie.

Cette réforme allait être réalisée en deux étapes : d'abord par Copernic, qui établit le système héliocentrique, puis par Képler qui écarta les combinaisons de mouvements circulaires pour poser les lois du mouvement elliptique. Il est juste de mentionner

1. Simple traduction latine du nom de sa ville natale.

ici, à côté de Copernic et Képler, Tycho-Brahé dont les observations nombreuses et plus précises que celles d'aucun de ses devanciers. permirent à Képler d'accomplir ses découvertes.

Pour juger tout d'abord l'œuvre de Copernic, il ne faut pas oublier que, bien que les origines de la théorie héliocentrique remontent, comme nous l'avons vu, à l'Antiquité grecque, bien que la rotation diurne de la terre ait été soutenue, au Moyen-âge, par quelques penseurs, les spéculations sur ce sujet étaient restées, en quelque sorte, *extérieures* à l'Astronomie et n'avaient eu aucune répercussion scientifique. Avec Copernic, c'est un nouveau système astronomique qui vient s'opposer à celui de Ptolémée, et qui se trouve appliqué à la représentation des observations et au calcul des tables.

Si l'on se borne à une vue générale des théories coperniciennes (orbites circulaires autour du soleil pour les six planètes connues à cette époque), les avantages en sont bien évidents. Les épicycles de Ptolémée sont supprimés, ou plutôt, ils s'interprètent comme orbites des planètes autour du soleil; toutes les parties du système se trouvent ainsi liées, les rapports mutuels sont déterminés, puisque les centres de tous les épicycles sont ramenés au soleil. Dans l'ancien système, au contraire, « tout était incohérent et vague, on pouvait à son gré rapprocher ou éloigner chacune des planètes, sans s'imposer d'autre loi que de ne point intervertir l'ordre des distances, en mettant plus près du cercle commun, la planète dont la révolution zodiacale est la plus longue; à cela près, tout était arbitraire[1]. »

1. Delambre, *Histoire de l'Astronomie moderne*, I, p. XI.

Mais Copernic tient pour l'axiome d'après lequel tous les mouvements doivent résulter de la combinaison des mouvements circulaires et uniformes. Cela l'amène, afin de suivre la complexité des apparences, à excentrer les orbites, à introduire de nouveaux épicycles, bref à reprendre les complications de l'Almageste. Si, dans la théorie de la lune, il apporte quelque simplification et une meilleure représentation des diamètres et des parallaxes, son système n'y était évidemment pour rien. En ce qui concerne le soleil et les planètes, son œuvre ne marque pas, au point de vue *pratique*, tous les progrès que l'on pourrait supposer.

Copernic était né à Thorn en 1472. Il séjourna dans sa jeunesse en Italie, revint se fixer à Frauenbergen, petite ville située aux confins de la Prusse et de la Pologne et où il élabora son ouvrage. Fort longtemps il hésita à le publier, et lorsqu'il céda enfin aux sollicitations de ses amis, il fit précéder le livre d'une prudente préface, affirmant qu'il hasardait seulement des *hypothèses*, dont la vérité et même la vraisemblance importait peu, pourvu qu'elles se prêtent au calcul, que d'ailleurs la *révélation* seule pouvait faire connaître les véritables causes. Ces précautions n'étaient rien moins qu'inutiles, comme devait le prouver le malheureux procès de Galilée.

Malgré des imperfections dont il ne faut pas exagérer l'importance, — elles sont inhérentes à l'époque et ramènent en somme, pour le détail, l'œuvre de Copernic, si originale dans son principe, dans le cadre de l'Astronomie pratique traditionnelle[1] —

1. Cf. Delambre, *Astr. Moderne*, I, p. 167 : « en renversant l'hypothèse de Ptolémée, Copernic dut sentir qu'il allait liguer contre lui

le traité *De Revolutionibus* eut un grand retentissement. Des élèves de Copernic, *Erasme Rheinhold* en particulier, continuèrent ses calculs; dans le même temps *Tycho-Brahé* (1546-1601) portait l'art d'observer à une perfection qui ne fut dépassée qu'après l'invention des lunettes.

Tycho-Brahé était d'une noble famille danoise; il manifesta de bonne heure la passion des études astronomiques et visita l'Allemagne, nouant des relations avec des astronomes, faisant construire des instruments. Une fâcheuse aventure — (au cours d'un duel son adversaire lui abattit le bout du nez et il dut se faire faire un nez « d'une composition d'or et d'argent qui ressemblait assez à un nez naturel ») — le détermina à se retirer en quelque sorte du monde pour consacrer tout son temps à l'Astronomie et à la Chimie, dans une île du Sund (Huen) qui lui avait été donnée par le roi Frédéric II de Danemark. Les libéralités de ce monarque le mirent à même de réunir autour de lui un nombreux personnel d'aides et de calculateurs, de faire édifier un véritable observatoire (*Uranibourg*), de le meubler d'instruments qui furent plus grands et plus précis que ceux de ses prédécesseurs et qu'il eut d'ailleurs le souci constant de perfectionner. Il apporta à l'amélioration des méthodes d'observation, des qualités critiques réelles et une grande conscience; aussi son catalogue d'étoiles, incomparablement supérieur à ceux d'Hipparque ou d'Ulugh Beigh, donne-t-il les positions à quelques minutes d'arc près. La décou-

tous les astronomes qui croiraient l'astronomie détruite jusqu'en ses fondements... Il se hâta de leur montrer que la partie mathématique restait intacte, et même recevait des améliorations sensibles. »

verte de nouvelles inégalités lui permir d'améliorer la théorie de la lune de Copernic. Enfin il laissa à ses successeurs une suite régulière d'observations des planètes, qu'il comptait utiliser à l'élaboration de son *système astronomique*.

Ce système, dont Tycho a du moins indiqué le principe dans ses ouvrages, accommode les idées de Copernic de manière à « satisfaire aux principes mathématiques et physiques, *sans encourir les sensures théologiques* » : « la terre n'a aucun mouvement annuel, elle est au centre de l'Univers, elle est le centre (de mouvement) du soleil, de la lune et de la sphère des fixes, les autres planètes tournent autour du soleil, Mars, Jupiter et Saturne aussi bien que Vénus et Mercure. » Au point de vue purement cinématique et en l'absence de toutes parallaxes annuelles d'étoiles (elles étaient bien inaccessibles à Tycho !) cette théorie est pratiquement équivalente à celle de Copernic. Jusqu'au moment où on se préoccupera d'une explication mécanique des mouvements et où l'on posera les bases de la théorie de la gravitation, on ne pourra guère donner, pour ou contre le mouvement de la terre, que des raisons de sentiment. On conçoit donc que Tycho ait été fort satisfait d'un compromis facile, qui le dispensait d'attribuer « à une masse inerte, opaque et paresseuse (!) comme la terre, un triple mouvement contre toute vérité physique et contre le témoignage exprès des Ecritures. » Il faut ajouter que lorsqu'il n'est pas aveuglé par son amour-propre d'auteur, Tycho rend pleine justice à la sagacité de Copernic et reconnaît que le mouvement de la terre n'a pas tous les inconvénient qu'on lui attribue[1].

1. *On trouvera une citation assez caractéristique dans l'Histoire de l'Astronomie moderne* de Delambre, t. I. p. 236-7.

Les dernières années de la vie de Tycho-Brahé furent troublées par des difficultés que lui amenèrent la mort de son protecteur Frédéric II. Il dut abandonner Uranibourg et se retira en Bohème, où il mourut en 1601. Peu de temps avant, Képler était venu travailler auprès de lui et ce fut le point de départ de ses découvertes.

C'est une grande et curieuse figure que celle de Képler, né près de Stuttgard en 1571, mort à Ratisbonne en 1630 et qui succéda à Tycho comme mathématicien de l'Empereur (Rodolphe II). Mathématicien fort remarquable, calculateur adroit et intrépide, astrologue à ses heures, parce que l'Empereur payait mal et que « la bonne nature qui a « donné à chaque animal ses moyens d'existence, « a désigné l'astrologie comme l'accessoire et l'alliée « de l'astronomie », il se passionna à la recherche des *causes*, et fut servi par une riche imagination — qu'il savait heureusement soumettre aux vérifications du calcul. « Nos faiseurs de système, dit Delambre, « n'ont pas imaginé plus de folies que Képler, mais « ils ne calculent rien et Képler soumettait tout au « calcul; il n'abandonnait pas une idée avant d'en « avoir bien démontré l'exactitude ou la fausseté... « il s'est ainsi distingué parmi tant d'autres rêveurs « qui n'ont pas eu le même courage, la même bonne « foi, ou qui n'avaient pas ses connaissances mathé- « matiques[1]. »

Dès son premier ouvrage (*Mysterium cosmographicum*, 1596) il se pose en partisan convaincu du système de Copernic et en cherche des raisons à priori : il pense aux polyèdres réguliers qui sont en

1. Delambre, *loc. cit.*, p. 455.

nombre limité tandis que les autres sont en nombre infini; les étoiles se divisent de même en deux catégories, les fixes, très nombreuses, les planètes, en très petit nombre; il prétend donc retrouver les rayons des orbites en emboitant les uns dans les autres, les divers polyèdres réguliers. Il cherche aussi une « proportion des mouvements aux orbes »; *vingt-deux ans plus tard* ses opiniâtres tâtonnements à ce sujet devaient aboutir et le conduire à la troisième des lois qui portent son nom : la proportionnalité entre les carrés des temps de révolution et les cubes des distances. De cette loi il apprécie immédiatement l'importance, en ce qu'elle implique *une cause commune* pour le mouvement des diverses planètes et donne raison à Aristarque et à Copernic lorsqu'ils font du soleil le centre unique du système du monde.

Il est bien probable que, sans Tycho-Brahé, Képler n'eut jamais énoncé ses deux premières lois, celles qui définissent le mouvement elliptique. L'occasion de leur découverte fut l'étude du mouvement de Mars, qui occupait Tycho au moment où Képler vint le rejoindre et pour laquelle la combinaison de mouvements circulaires était décevante, du fait de la grande excentricité de cette planète. Mais il faut suivre, dans l'*Astronomia Nova* (1609) les divers moments de cette découverte, pour apprécier toute l'admirable ténacité de Képler, partant de l'hypothèse d'un excentrique, s'obstinant longtemps dans la recherche d'un ovale, qu'il voulait plus large par un bout que par l'autre, tombant enfin, par un de ces hasards heureux qui récompensent une longue patience, sur la projection orthographique, qui lui donne la trajectoire elliptique. C'est de même *par l'expérience*, *par la force du calcul*, qu'il arrive

à la loi des aires qui lui définit le mouvement sur l'orbite.

Peu après le moment où Képler achevait ainsi l'œuvre de Copernic, l'invention des logarithmes venait apporter, dans les calculs astronomiques, une notable simplification. Les multiplications ou divisions à effectuer sur des nombres qui pouvaient comporter une dizaine de figures, imposaient aux calculateurs une tâche singulièrement fastidieuse; des transformations trigonométriques connues[1] permettaient, il est vrai, de procéder toujours par additions ou soustraction, mais une solution autrement élégante était apportée par la publication, en 1614, du *Mirifici Logarithmorum canonis constructio* de l'Ecossais *Jean Néper*, baron de Merschiston (1550-1617). Il faut citer ici aussi le nom de *Bürgi* dont les tables de progressions (*progresstafeln*) publiées seulement en 1620, ont été probablement établies avant celles de Néper; les logarithmes que nous appelons actuellement népériens (base *e*) sont ceux de Bürgi; dans le système de Néper, la base était $\frac{1}{e}$.

On sait que l'on peut faire dépendre la notion de logarithme d'une correspondance établie entre deux progressions : l'une arithmétique, l'autre géométrique. Pour pouvoir définir les logarithmes de tous les nombres il faut envisager des progressions procédant par degrés insensibles. C'est l'idée de Néper, idée qu'il précise par une représentation cinématique : comme il s'intéresse avant tout aux sinus, il envisage deux mobiles, l'un décrivant, en allant vers le centre, le rayon du cercle (pris égal à 10.000.000),

1. Elles n'ont point cessé d'être employées, mais en sens contraire, de manière à *rendre calculables par logarithmes* une somme ou une différence en la transformant en produit.

l'autre décrivant une droite indéfinie; ces deux mobiles partent avec la même vitesse, mais tandis que le second a un mouvement uniforme, le premier a une vitesse variable toujours proportionnelle à la portion du rayon qui lui reste à décrire. L'abscisse du second mobile définit les logarithmes et la représentation cinématique en fournit aisément des limites, supérieure et inférieures, qui donnent à Néper toute sécurité dans ses calculs numériques, fort adroitement conduits. Nous ne le suivons point dans ses calculs, nous nous contentons d'y noter le premier emploi systématique des fractions décimales. L'invention des logarithmes fut très remarquée et en particulier par Képler qui en calcule de son côté (Logarithmorum Chilias, 1624) et qui leur fait place dans ses grandes tables astronomiques, dites Rudolphines (1627), tables tirées des observations de Tycho. Mais il faut surtout mentionner à côté de Néper, *Henri Briggs*, professeur à Oxford (1561-1631) auquel on doit les premières tables logarithmiques ayant une base décimale. Néper et Briggs s'étaient accordés sur les avantages pratiques d'un tel système, qu'ils paraissent avoir reconnu indépendamment. Briggs se consacre à la réalisation et ses tables parurent en 1617 et 1629.

Quelques années avant la publication du *Cano Mirificus*, nous avons à signaler une autre invention fort importante pour les progrès de l'Astronomie, celle de la lunette. Nous aurons l'occasion de donner quelques détails en étudiant l'œuvre de *Galilée*.

Galilée (1564-1642) a joué un rôle de premier plan dans le développement des méthodes expérimentales. Il excellera à l'analyse d'une question particulière, sachant appuyer d'expériences originales

ses vues théoriques, bref mettant en pratique les principes que devait exprimer, dans le *Novum Organum*, son contemporain François Bacon. Il a beaucoup contribué, comme nous aurons l'occasion de le voir, à répandre les doctrines coperniciennes, mais ses travaux les plus importants concernent la Mécanique. Pour en comprendre tout l'intérêt, il faut expliquer tout d'abord quel était l'état de cette science vers la fin du XVIe siècle.

Elle se réduisait en fait à quelques parties de la statique, et entre autres, à l'étude théorique des machines simples, utilisées pratiquement de toute antiquité. Il semble qu'il y ait eu à cet égard, dans l'Italie du XVe et du XVIe siècles deux courants d'influence : l'un venant des Grecs, et particulièrement d'Archimède, qui avait développé, sous forme axiomatique, la théorie du levier et celle des centres de gravité, l'autre procédant d'idées introduites au XIIIe siècle par Jordanus Nemorarius, qui entrevoit le principe du travail virtuel à la base de la statique, idées précisées par un disciple anonyme que Duhem[1] désigne comme « précurseur de Léonard de Vinci ». Après Léonard dont les écrits scientifiques abordent de très nombreuses questions de mathématiques appliquées, on doit citer Tartaglia et Cardan, puis Guido Ubaldo dont le traité (Mechanicorum Liber), paru en 1577, développe la théorie des machines simples à partir du principe du levier; c'est au même point de vue que se place Galilée dans ses « Mechaniques » publiées pour la première fois en 1634 par le Père Mersenne, dans leur traduction française. Plus original est l'ouvrage du Hollandais

1. *Les Origines de la statique*. On consultera aussi les *Etudes sur Léonard de Vinci*, Herman, 1906-9-13.

Stevin (1548-1620) intitulé « Statique et Hydrostatique (Leyde, 1586) dont l'auteur représente les forces par des segments, a une idée nette de leur composition, donne une très élégante démonstration des propriétés du plan incliné.

La dynamique et aussi la cinématique — car elles sont à leur début très étroitement liées — étaient restées rudimentaires. Nous avons déjà signalé la réaction contre l'Aristotélisme amorcée par les maître parisiens du XIVe siècle et, en particulier, la doctrine de l'*impetus* de Jean Buridan. Les idées en question s'étaient répandues en Italie, et l'on retrouve ainsi, comme l'a montré Duhem, l'influence d'Albert de Saxe et de Nicolas de Cues dans la pensée de Léonard de Vinci. Mais on ne peut parler ici d'acquisitions définitives de la Science : en ce qui concerne le mouvement des graves, que devait mettre à l'ordre du jour le progrès des armes de jet et l'invention de la poudre, Léonard de Vinci connaît la loi de variation de la vitesse pendant une chute verticale, mais il admet par contre, et Cardan après lui, un affaiblissement de l'*impetus* qui fait passer graduellement du mouvement violent au mouvement naturel[1]. Ce seul exemple montre que le départ n'était point fait entre ce qui dépend de la gravité et ce qui est dû à d'autres causes (résistance de l'air en l'espèce).

C'est le grand mérite de Galilée que d'avoir parfaitement élucidé cette question du mouvement des graves. En 1583, étant étudiant à l'Université de

1. Dans un ordre d'idées analogue, Tartaglia admet que la trajectoire d'un projectile comporte une droite inclinée (mouvement violent) et une verticale (mouvement naturel) raccordées par un arc de cercle.

Pise, il avait observé l'égalité des petites oscillations d'un pendule. Ses premières expériences sur la chute libre, furent faites à la tour penchée, alors qu'il était professeur à la même université (1589-1591). L'ensemble de ses recherches est réuni et publié beaucoup plus tard (1638) dans son chef-d'œuvre : les « Discorsi intorno a due nuove Scienze[1]. »

Lorsque, par exemple (et c'est assez caractéristique de sa manière), Galilée ruine l'opinion aristotélicienne de vitesse de chute proportionnelle au poids, il fait appel à l'expérience (oscillations de pendules de même longueur et de poids différents), mais il sait aussi faire apparaître des contradictions logiques (si un corps de poids 10 tombe plus vite qu'un corps de poids 1, lorsqu'on les réunit, le plus lent devrait enlever quelque chose à la vitesse du plus rapide, de sorte qu'un corps de poids 11 tomberait moins vite que celui dont le poids est 10, ce qui contredit l'hypothèse initiale). Il dégage la notion de mouvement uniformément accéléré en montrant par de nombreuses expériences que cette notion s'applique à la chute libre ou à la chute le long d'un plan incliné (lorsque, par une abstraction d'abord nécessaire, on néglige les résistances). La composition d'un mouvement horizontal uniforme et du mouvement vertical le conduit enfin à poser les lois du mouvement parabolique; ses idées à ce sujet furent complétées par son disciple *Torricelli*.

En 1591, Galilée avait dû quitter Pise et peu après, fut appelé à Padoue où il enseigna 18 ans. C'est là qu'il apprit en 1609 qu'un opticien hollandais, Lippersheim, avait fait une lunette qui rapprochait les

1. Il convient de noter que, avant leur impression, les écrits de Galilée étaient connus, en manuscrit, des contemporains.

objets. Il construit, après quelques essais, une lunette qui grossissait trente fois et avec laquelle il réalisa de nombreuses découvertes astronomiques, très frappantes pour les contemporains : la découverte des taches du soleil mettait en évidence sa rotation et (ce qui était plus important, mais on a peine à l'imaginer maintenant) venait ruiner le dogme aristotélicien de l'incorruptibilié et de l'immutabilité des corps célestes; l'observation des phases de Vénus, la découverte des satellites de Jupiter permettent de faire valoir de nouveaux arguments en faveur des doctrines coperniciennes.

On sait que Galilée défendit le système héliocentrique dans ses *Dialogues sur le système du monde* (1632) qui malgré une prudente préface lui attirèrent la condamnation du Saint-Office. Son procès est l'épisode le plus marquant de la longue lutte que durent soutenir, avant de pouvoir se manifester librement, les nouvelles théories.

§ 2. Les influences françaises au XVIIe siècle — Fermat et Descartes; la géométrie analytique.

C'est peut-être au XVIIe siècle que se manifeste le plus nettement ce déséquilibre que nous avons déjà signalé entre la valeur *formelle* de la culture médiévale — qui dominait encore dans l'enseignement et le contenu même de cette culture. Les esprits mûris se tourneront vers les sciences, récemment retrouvées : beaucoup s'y arrêteront; d'autres plus rares, et c'est le cas de Descartes, y chercheront seulement le point de départ d'une nouvelle philosophie.

La Renaissance scientifique qui avait débuté en Italie et en Allemagne s'épanouit alors dans notre pays. Le rayonnement européen de la pensée française ne s'explique d'ailleurs pas seulement par l'œuvre de quelques hommes de génie, tels que Descartes ou Fermat, il dépend aussi des relations actives qui s'établissent entre savants et qui aboutissent à former un véritable milieu scientifique où toutes les découvertes sont accueillies avec curiosité et ont leur retentissement, où peuvent s'ouvrir des discussions fécondes. Une influence très grande et très heureuse fut ainsi exercée par un homme qui n'a pourtant attaché son nom à aucun progrès de la science : le Père Marin Mersenne, religieux de l'Ordre des Minimes (1588-1648).

Mersenne, qui avait été le condisciple de Descartes au collège des Jésuites de la Flèche, fut un enthousiaste de la science et entretint une correspondance active avec presque tous les savants éminents de son temps. A une époque où n'existait aucune de ces revues spécialisées qui, de nos jours, constituent l'auxiliaire indispensable du travail scientifique, il tient un rôle précieux d'informateur, et même d'éditeur, car il lui arrive de faire publier les travaux de ses correspondants. De ce double rôle, Mersenne s'acquitte avec conscience et impartialité, modeste pour lui-même et satisfait d'amorcer par ses questions de nouvelles recherches ou des controverses dans lesquelles sa personnalité s'efface.

Les savants en résidence ou de passage à Paris prirent l'habitude de se réunir chaque semaine, chez Mersenne et les réunions continuèrent après la mort de ce dernier. C'est l'origine de l'Académie des Sciences qui fut définitivement organisée en 1666

par Colbert; bientôt après était fondé l'Observatoire et, dans le même temps, des savants étrangers étaient attirés à Paris : *Huyghens*, *Roemer*, *Cassini* qui s'y fixa définitivement. Ainsi, vers la fin du siècle, l'appui de l'Etat venait achever ce qu'avait commencé l'initiative privée.

Les deux plus grands mathématiciens du siècle ont été *Descartes* et *Fermat*. Remarquablement doués tous deux sous le rapport de l'invention mathématique, ils sont cependant, à tous égards, fort différents d'esprit et de caractère. Nous pouvons ici les mettre en parallèle, les éclairer par contraste sans que le rapprochement établi doive diminuer l'un ou l'autre.

La vie aventureuse de *Descartes* (1596-1650) est trop connue pour qu'il soit besoin de la retracer ici. La vie de *Fermat* fut, au contraire, toute unie et toute droite; il était né près de Montauban et il devint, en 1631, Conseiller au Parlement de Toulouse. il garda cette charge jusqu'à sa mort, en consacrant tous ses loisirs à l'étude. La célébrité lui vint sans qu'il l'eût cherchée, il se fit connaître par la correspondance qu'il entretint avec d'autres mathématiciens, par des manuscrits de lui qui circulèrent; l'essentiel de son œuvre ne fut imprimé qu'après sa mort.

Dans une conversation familière avec Schooten, rapportée dans une lettre de ce dernier à Huyghens, Descartes porte, de son rival Fermat et de lui-même, le jugement suivant : « M. de Fermat est un gascon, « moi non. Il est vrai qu'il a inventé plusieurs belles « choses particulières et qu'il est homme de grand « esprit; mais quant à moi, j'ai toujours étudié à con- « sidérer les choses fort généralement, afin d'en pou-

« voir conclure des règles qui aient aussi ailleurs de « l'usage. » Il y a, dans cette boutade, une certaine part de vérité, en ce qu'elle oppose un pur mathématicien, — qui connaissait d'ailleurs fort bien, dans son domaine, la valeur des méthodes générales et qui savait s'y élever — et un philosophe qui, un peu prématurément, cherchait, par delà les mathématiques, une science intégrale de l'Univers. Pour atteindre ainsi, en des spéculations plus incertaines, les limites de son génie, Descartes finit par se désintéresser des mathématiques « vulgaires » : Il en est las, comme il le dit à Mersenne et, sans l'insistance de ses correspondants, nous n'aurions peut-être qu'une idée incompléte de sa puissance d'invention.

La partie la plus caractéristique de l'œuvre de Fermat est sans doute celle qui concerne la théorie des nombres. Le point de départ de ses recherches sur ce sujet, fut l'*Arithmétique* de Diophante qui avait été publiée pour la première fois, traduite en latin par *Holtzmann* (1571) et dont une bonne édition dans le texte grec avait été donnée par *Bachet de Méziriac* en 1621. C'est sur le Diophante de Bachet que travaille Fermat et il note en marge de son exemplaire les résultats de ses investigations qui concernent, par exemple, les propriétés des nombres premiers, la représentation des entiers comme somme de carrés, la théorie des équations indéterminées : l'ensemble ne fut publié qu'en 1670 par son fils Samuel.

Fermat ne donne pas de démonstrations et nous n'avons par sa correspondance que des renseignements très imprécis sur les méthodes qu'il a pu suivre, mais les résultats qu'il a obtenus suffisent à donner la plus haute idée de son génie mathématique et à

le poser en fondateur de la théorie des nombres moderne. Pour marquer combien il dépasse, à cet égard, tous ses contemporains il faut rappeler ici que les démonstrations des principaux théorèmes énoncés par lui ne furent retrouvés qu'un siècle plus tard, par Euler et Lagrange.

L'un de ces théorèmes concernant l'impossibilité de satisfaire en nombres entiers, toute équation

$$x^n + y^n = z^n$$

où n est plus grand que 2, a défié jusqu'à présent tous les efforts qui ont pu être faits pour l'établir ou pour le trouver en défaut. Etant donné les progrès, qui ont été considérables, des méthodes d'investigation, il est permis de supposer que Fermat n'en a pas eu, comme il le pensait, une démonstration rigoureuse.

L'activité de Fermat s'est aussi exercée et très heureusement, dans d'autres directions. En géométrie et en analyse, il se pose, comme nous le verrons en rival de Descartes. Il faut indiquer aussi la part qu'il a prise à la fondation du *calcul des probabilités.*

Cette dernière théorie qui devait être fort à la mode au XVIIIe siècle, mais dont la véritable importance n'apparaît que de nos jours, par le développement d'applications qui sont aussi bien du domaine des sciences physiques (théorie cinétique de la matière) que du domaine des sciences biologiques ou économiques, a eu des débuts fort modestes : quelques questions relatives aux jeux de hasard et, en particulier, le problème qui est dit *problème des partis.* Il s'agit de répartir les enjeux entre deux joueurs qui conviennent d'abandonner une partie avant qu'elle ne se termine, la règle du jeu étant que le gagnant. serait celui qui, le premier, atteindrait un nom-

bre donné de points; le partage doit évidemment se faire proportionnellement aux probabilités de gain qui dépendent pour chacun des joueurs des nombres de points déjà acquis et toute la difficulté est dans l'évaluation de ces probabilités.

C'est *Blaise Pascal* qui attira l'attention de Fermat sur ces questions et (1654) Fermat et Pascal donnèrent du problème des partis des solutions basées sur des méthodes différentes. Le raisonnement de Fermat se fonde sur l'étude des combinaisons possibles et est plus général, en ce qu'il s'applique aussi au cas d'un nombre quelconque de joueurs. La méthode de Pascal est très ingénieuse et n'est point sans portée, car elle utilise au fond l'équation aux différences partielles du problème, pour déterminer les probabilités en allant des valeurs les plus petites aux valeurs plus grandes; il trouve là une application de son *triangle arithmétique* où figurent obtenues par des règles simples et bien connues,' les coefficients du binome. Cette dernière découverte (celle du triangle arithmétique) était fort importante et elle appartient bien en propre à Pascal, tant pour le fond que pour les conséquences qu'il en tire, quoiqu'elle se trouve en germe dans l'*Arithmetica integra* de *Michel Stifel* (1544) contemporain et ami de Luther.

Le nom de Pascal reviendra plusieurs fois dans la suite de cette étude. Ses étonnantes aptitudes mathématiques permettent de le mettre sur le même plan que Descartes ou Fermat, et l'on s'en rend déjà compte dans les recherches sur les probabilités qui permettent d'établir une comparaison avec le dernier de ces savants. Son œuvre, toute de qualité est pourtant bien loin des réalisations que l'on pou-

vait attendre d'un tel génie. Mais on sait que, si Pascal montre une étonnante précocité mathématique[1], des préoccupations mystiques viennent, à la fin de sa courte existence, reléguer au second plan le travail scientifique.

Nul n'ignore que Descartes a eu un rôle décisif dans l'élaboration de la moderne géométrie analytique : c'est une date des plus notables dans l'histoire des sciences que celle de la publication de sa *Géométrie*, qui paraît avec la *Dioptrique* et le traité *des Météores*, en appendice au « *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* » et constitue un essai de cette méthode (1637).

Il y aurait quelque exagération à prétendre avec Auguste Comte (dont l'opinion a été souvent reproduite), que Descartes rapprochait *pour la première fois* deux sciences, géométrie et algèbre, conçues jusqu'alors d'une manière isolée. Il faut chercher un peu plus loin la véritable originalité de l'œuvre de Descartes, et, pour le bien apprécier, il n'est pas inutile de préciser, comme nous allons essayer de le faire, les diverses directions dans lesquelles se développait, au XVIIe siècle, la recherche géométrique.

On doit tout d'abord noter qu'à cette époque, les œuvres les plus difficiles de l'antiquité grecque sont comprises, assimilées et complétées (Fermat tente ainsi une restitution de l'ouvrage d'Apollonius sur les lieux plans). C'est le point de départ de deux courants de recherches, qui eurent d'ailleurs des fortunes bien différentes.

1. Il est sans doute superflu de rappeler ici les anecdotes bien connues qui témoignent de cette précocité.

Le lyonnais *Gérard Desargues* (1593-1662) pose les bases de la *éométrie synthétique* dans son *brouillon-projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*. Il y introduit pour la première fois la notion d'éléments géométriques (points et droites) à l'infini, développe la théorie de l'involution, celle des pôles et polaires et fait l'étude projective des coniques. Dans le groupe Mersenne, Desargues jouit d'une réputation tout à fait justifiée et il fait presque figure d'arbître dans le différend célèbre entre Descartes et Fermat au sujet de la détermination des tangentes[1]. Il a exercé une influence sur Pascal qui écrivait, à l'âge de 16 ans, un traité complet des coniques, malheureusement perdu, inspiré par les méthodes du *brouillon-projet*. Il fut pourtant très vite complètement oublié au point qu'aucun exemplaire de son livre n'a été conservé et que nous n'en connaissons qu'une copie manuscrite, retrouvée par Chasles en 1845. Les bizarreries de style et les obscurités de Desargues peuvent avoir contribué à cet état de choses, mais, surtout, d'autres études plus immédiatement fécondes, sollicitaient l'attention des chercheurs : *calcul infinitésimal*, et, en géométrie, *méthode des coordonnées*.

Cette dernière méthode apparaît dans la géométrie de Descartes, et aussi dans deux écrits de Fermat qui circulèrent en manuscrit à la fin de 1637 : l'*Isagoge* (introduction) *ad locos planos et solidos* et l'*Appendix* — Les origines grecques en sont indéniables, puisque, comme nous avons déjà eu l'occasion de le voir, les géomètres alexandrins savaient caractériser les coniques par la relation qui donne

1. Cf. ce chapitre, § 3, p. 91.

les longueurs des cordes conjuguées d'un même diamètre, et connaissaient donc, en fait, ce que nous appelons l'équation *cartésienne* de la courbe. Seulement pour passer de là à l'idée que toute relation entre deux variables peut être interprétée comme représentant un lieu géométrique, il fallait ce sens de *généralisations*, cet esprit de synthèse qui a manqué aux Anciens et qui est assez caractéristique de la science moderne.

La nécessité de cette généralisation est *évidente* aux yeux de Descartes, et à tel point, qu'il ne paraît y attacher aucun amour-propre d'auteur : lui qui par ailleurs est si prompt à revendiquer ses découvertes, à repousser tout rapprochement entre son œuvre et celle de tel de ses contemporains, ne manifeste aucune émotion à retrouver, dans l'Isagoge une conception fondamentale et très féconde. C'est *un point de départ* que chacun peut — et même doit — trouver dans les œuvres grecques et, sans s'attarder aux détails[1], Descartes en tire une classification de courbes géométriques, d'après les degrés des équations et même, mais plus vaguement, l'idée d'une classification générale de tous les problèmes relatifs à la quantité continue.

Il y a bien d'autres choses, et fort importantes à noter dans la géométrie de Descartes. D'abord l'idée d'une science générale de la grandeur, conçue indépendamment de toute représentation concrète ou du moins en montrant très nettement que toute espèce de grandeur (surface, volume, etc...) peut être

1. Il se trouve ainsi que Descartes ne donne même pas l'équation de la droite que l'on trouve chez Fermat ; c'est ce qui a pu faire dire à G. Cantor que le géomètre toulousain avait appliqué, avec plus de clairvoyance que Descartes, la conception fondamentale de la géométrie analytique.

interprétée comme une longueur, dès que l'unité a été choisie. C'est, dans un livre qui par ailleurs est si proche, dans l'étude géométrique des équations, de la Science grecque, la rupture *définitive* avec les formes incommodes de l'Algèbre géométrique. A l'avantage qui en résulte, vient s'ajouter le progrès dans les notations algébriques, progrès qui est considérable : l'écriture algébrique moderne a été, sinon inventée, du moins organisée par Descartes.

Il faut enfin noter dans la *Géométrie* une première méthode générale pour la détermination des tangentes. Sur ce point encore, Descartes se rencontrait avec Fermat et ce fut l'origine d'une vive discussion à laquelle prirent part aussi Roberval et Etienne Pascal. Il en sera question au début du prochain paragraphe, où nous réunissons tout ce qui concerne les progrès du calcul infinitésimal.

§ 3. Calcul différentiel et calcul intégral

Pour déterminer la tangente à une courbe, Descartes cherche, ce qui revient évidemment au même, le pied de la normale sur l'axe des abcisses : ce point est le centre d'un cercle tangent à la courbe et la condition de contact pourra s'exprimer en écrivant que l'équation aux ordonnées communes du cercle et de la courbe admet une racine double, c'est-à-dire un facteur $(y - c)^2$, c étant l'ordonnée du point de contact. Ainsi procède Descartes, en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

Le problème de la détermination des tangentes est ainsi résolu, au moins théoriquement, pour toute courbe algébrique. Mais il s'en faut de beaucoup que

la marche proposée par Descartes soit l*a plus simple* possible, c'est ce que remarque Fermat. Aussi par l'intermédiaire de Mersenne, fait-il tenir à Descartes un petit traité manuscrit « *de maximis et minimis* » traité déjà ancien (1629) où il donnait une méthode générale des maxima et minima, avec, en application, la détermination de la tangente à la parabole Et il s'étonne de ce que Descartes n'ait pas trouvé la même chose.

La méthode de Fermat pour déterminer les maxima ou minima, vaut qu'on s'y arrête. Il donne, à la variété A, dont dépend la grandeur étudiée G un accroissement arbitraire E et pose l'équation :

$$(1)\quad G\,(A) = G\,(A + \mathrm{E}).$$

Des simplifications mettent en évidence un facteur E, que l'on supprime. Dans les termes restants, on remplace E par zéro et il reste une équation qui détermine les valeurs de A réalisant les maxima et minima de G.

On rapproche ordinairement l'équation (1) précédente de la remarque, déjà faite par Nicolas Oresme et par Képler, que les variations d'une grandeur deviennent insensibles au voisinage d'un maximum (ou d'un minimum). Le point de départ de Fermat est, de son propre témoignage[1], beaucoup plus éloigné de toute intuition infinitésimale : il a remarqué que, de part et d'autre d'un maximum, la grandeur considérée reprend les mêmes valeurs, de sorte que, A et A' étant deux valeurs convenablement choisies de la variable, on peut écrire :

$$G\,(A) = G\,(A').$$

1. D'après un fragment que nous a conservé Mersenne (Œuvres de Fermat, t. III, p. 131); ce fragment nous paraît prouver que Fermat était en possession de la justification, plus tard donnée par Huyghens, *Ibid.*, t. IV, p. 143 et 223, de sa règle *de maximis*.

Des équations de ce genre avaient été systématiquement traitées par Viète, dont Fermat suit les méthodes : le degré sera abaissé en mettant en évidence le facteur A-A' et, pour éviter une division par un binôme « généralement compliquée et trop pénible » mieux vaudra poser $A' = A + E$ (ce qui donne (1), la simplification se faisant alors par simple suppression du facteur E. Reste, et ce point appartient en propre à Fermat à faire $E = o$ pour déterminer le maximum. On voit, et il est instructif d'y insister, que c'est dans le but terre à terre de simplifier un calcul algébrique que s'introduit cette variable E qui en fait, dans les calculs de Fermat, se comporte comme une différentielle. La règle « de maximis » revient très exactement à calculer et annuler la différentielle de G; et pourtant, au début du moins, la pensée de Fermat est plus proche de de celle de Viète que de l'intuition d'Oresme ou de Képler.

Au début seulement, pouvons-nous dire, en examinant les applications, fort nombreuses, que Fermat a données de sa règle. Nulle part peut-être ne se révèle mieux l'admirable souplesse de son génie. Mais, si le détail est toujours très clair et les résultats évidemment corrects, il est plus malaisé de suivre la pensée profonde de Fermat, car dans beaucoup de ces questions (recherches de tangentes, déterminations de centres de gravité, c'est-à-dire quadratures), il y a bien plus application du procédé de calcul indiqué sur (1), qu'examen d'une question précise de maximum ou minimum. L'intuition infinitésimale intervient au moins indubitablement lorsque, pour obtenir la tangente à la cycloïde et à des courbes analogues, Fermat pose en principe

que l'on peut substituer aux arcs de courbes, les longueurs correspondantes des tangentes[1].

Le petit traité « de Maximis » fut violemment critiqué par Descartes. Il indique d'abord une question de maximum où la règle de Fermat ne s'applique pas — pour des raisons qui nous sont bien évidentes — et il veut en conclure la fausseté de cette règle. D'autre part, il ne veut voir dans la détermination de la tangente à la parabole qu'un heureux artifice particulier et la généralité du procédé, qui était, il faut bien le dire dans la pensée de Fermat, plus que dans son écrit, lui échappe entièrement[2]. La discussion fut soigneusement entretenue par Mersenne. Elle n'aboutit naturellement pas, chacun des adversaires restant sur ses positions, mais elle eut tout de même d'heureuses conséquences. Fermat fut amené à faire connaître les nombreuses applications de sa règle, dont il a été question précédemment et que nous ignorerions probablement sans cela. Descartes, sous couleur de corriger la méthode de Fermat, revient sur le problème des tangentes et pose, fort nettement, leur définition comme droites coupant la courbe en deux points confondus. Tous résultats définitivement acquis, parce que l'attention des contemporains a été fortement retenue sur ces questions.

Si, après cet examen de travaux qui impliquent, en somme, les premiers calculs des dérivées, nous passons au calcul des quadratures, la première œuvre importante à citer est la *Stereometria doliorum* de Képler (cubature des tonneaux, c'est-à-dire des

1. *Œuvres*, t. III, p. 140.
2. Nous renvoyons à cet égard le lecteur aux belles études de G. Milhaud sur Descartes, *Descartes savant*, Alcan, 1921.

corps de révolution) publiée en 1615. Œuvre très significative parce que, pour la première fois, les vieux procédés d'exhaustion sont résolument abandonnés : Képler n'hésite pas à calculer des aires et des volumes par la sommation, évidemment peu rigoureuse, d'éléments très petits. Pour ne prendre ici que l'un des exemples les plus simples, il envisage ainsi le volume sphérique comme somme d'une infinité de cônes, dont le sommet commun est au centre.

Cela n'alla point, bien entendu, sans quelque scandale et les pures traditions grecques trouvèrent des défenseurs indignés. D'autres savants, mieux inspirés, suivaient la voie ouverte par Képler et cherchaient à perfectionner ses méthodes.

L'Italien *Bonaventure Cavalieri* (1598-1647) prenait ainsi pour point de départ, dans sa *Géométrie des indivisibles* (1635), des vues théoriques, nécessairement un peu simplistes, sur la constitution du continu. Pour lui, une ligne est formée par la juxtaposition de points indivisibles, une surface par un nombre infini de lignes, un volume par une infinité de surfaces (sans épaisseur). Cela lui permet de passer des relations entre les éléments constituant, au rapport des aires ou des volumes et d'obtenir des résultats qui expriment, sous une forme géométrique, les intégrales des premières puissances de x[1].

1. Un exemple particulier donnera une idée plus précise du point de vue de Cavalieri. Soit un parallélogramme et l'un des triangles qu'y détermine une diagonale; une parallèle arbitraire à un des côtés détermine, dans le parallélogramme, la corde b, dans le triangle la corde x et l'on doit considérer le parallélogramme comme composé de toutes les cordes b, le triangle de toutes les cordes x. Cavalieri se permet d'envisager le rapport entre la somme de tous les b et la somme de tous les x, et c'est le rapport des deux aires. Il considère aussi le rapport entre la somme des carrés des b et celle des carrés des

Les géomètres français n'avaient pas attendu le traité des indivisibles de Cavalieri pour s'appliquer à des questions de calcul intégral. Nous avons déjà fait allusion aux centres de gravité obtenus par Fermat à l'aide de sa règle *de maximis*. Il en fait l'objet d'un défi à Descartes (1632) et ce dernier, moins de trois mois après, est en état de donner la solution à Mersenne.

Descartes n'indique pas sa méthode, mais, dans un autre problème (quadrature de la cycloïde, proposée en défi par Roberval en 1632) nous le voyons « manier avec la plus grande aisance ce qui devait être l'essentiel de la méthode de Cavalieri[1] » et y ajouter, pour ceux (dont il n'est pas) à qui répugnent les considérations infinitésimales, la plus parfaite démonstration par exhaustion. Il effectue aussi, pour répondre à une question proposée par son ami de Beaune, la première détermination de courbe par les propriétés de la tangente, c'est-à-dire la première intégration d'équation différentielle.

Roberval (*Gilles Personnier* né à Roberval en 1602, mort à Paris en 1675) l'auteur du défi concernant la cycloïde, était, lui aussi, en possession d'une *doctrine de l'infini* équivalente à celle des indivisibles et même présentant quelques avantages. Beaucoup de ses travaux (qui ne furent publiés dans leur ensemble qu'après sa mort) concernent la cycloïde. On peut aussi signaler la méthode pour les tangentes basée sur des considérations cinématiques et qui a gardé son nom, méthode fort ingénieuse mais qu'il appli-

x et un raisonnement géométrique, qui nous importe peu, lui permet de le déterminer : la connaissance de ce dernier rapport équivaut, en fait à celle de $\int_0^a x^2\,dx$.

1. Milhaud, *loc. cit.*, p. 198.

que souvent de façon inexacte. Plusieurs des résultats de Roberval furent obtenus, indépendamment, par des contemporains tels que *Torricelli* (1608-1647) élève de Galilée, et l'Anglais *Wren* (1632-1723).

La liste serait longue des savants qui, vers le milieu du XVIIe siècle, participent plus ou moins au progrès des questions infinitésimales. Sans insister sur ceux qui, comme *Grégoire de Saint-Vincent*, se rattachent à la tradition grecque, il faut au moins signaler les perfectionnements que *Barrow* (1630-1677) professeur à Cambridge dans la chaire que devait illustrer *Newton*, apporte à la théorie des tangentes. Dans un ordre d'idées différent, le premier emploi des séries infinies, se trouve dans les travaux de *Brouncker*, de *Grégory*, de *Mercator*, surtout de *Wallis*. Ce dernier, qui enseigna à Oxford de 1649 à 1703, contribua grandement dans son *Arithmetica Infinitorum*, publiée en 1656, au progrès des méthodes d'intégration en les dépouillant des formes géométriques qui étaient celles de Cavalieri.

Pascal enfin, qui, après son triangle arithmétique, avait obtenu des formules pour les sommes des puissances de termes en progression arithmétique, en conclut, par des considérations infinitésimales, la quadrature des paraboles de tous ordres. Dans ses derniers travaux sur la cycloïde (1658), il effectue aussi des quadratures que nous indiquerons par les formules :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \, d\varphi \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin \varphi \, d\varphi$$

Il intervient, de façon très heureuse, dans les discussions, plus ou moins philosophiques, qu'entraînait l'usage des indivisibles, en précisant que « quand on

parle de la somme d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales ou indéfinies de laquelle on entend qu'elles soient multipliées ». De lui à Leibniz qui posera les notations actuelles du nouveau calcul, la transition serait évidente, même si l'on ignorait que Leibniz ait eu, par Huyghens, communication des écrits signés du pseudonyme d'Amos Dettonville[1].

§ 4. Nouveaux progrès de l'Astronomie et de la Mécanique. Les débuts de la Physique

La continuité que montre l'histoire des progrès scientifiques rend fort malaisée toute séparation en chapitres ou en paragraphes, c'est par une division toute artificielle que nous avons interrompu, à Galilée, l'histoire de la Mécanique et de l'Astronomie. Il est vrai qu'à ce moment les mathématiques pures (géométrie analytique, méthode des indivisibles) devaient retenir notre attention. Mais il faut maintenant renouer la chaîne en rapprochant d'abord du nom de Galilée celui de Descartes, car ces deux hommes ont également contribué au premier développement de la Mécanique.

Ils y apportèrent des qualités en quelque sorte opposées. Galilée va du particulier au général et sa fine analyse expérimentale amorce les conceptions générales plus qu'elle ne les explicite. Descartes, bien qu'il ait apprécié et repris pour son compte les idées de Bacon, ne fait à l'expérience qu'un appel souvent très rapide et « ne veut satisfaire sa soif de

1. On sait que les Provinciales parurent sous le nom de Louis de Montalte. Amos Dettonville en est l'anagramme.

certitude que par des déductions *à priori* tirées des semences de vérité que nous portons en nous ». On s'explique ainsi fort bien qu'il y ait, dans la Physique cartésienne, des théories d'une valeur bien inégale.

Descartes est revenu à plusieurs reprises sur le *principe de l'inertie* et il énonce cette loi avec un netteté remarquable, au début de ses *principes de philosophie* : « Si un corps a commencé une fois de se mouvoir, nous devons conclure que jamais il ne s'arrête de soi-même... chaque partie de matière en son particulier ne tend jamais à se mouvoir suivant des lignes courbes mais suivant des lignes droites... et nous le pouvons même sentir de la main pendant que nous faisons tourner une pierre dans une fronde, car elle tire et fait tendre la corde pour s'éloigner directement de notre main ». Il dégage ensuite la notion de quantité du mouvement et pose, assez arbitrairement, sa conservation, donnant ainsi du moins une sorte de modèle pour l'élaboration future de la mécanique rationnelle. Les théories cosmogoniques (hypothèse des tourbillons) exposées dans les *principes* n'ont pas à nous retenir ici. Nous noterons enfin, dans un petit traité de 1638, « Expli« cation des engins par l'ayde desquels on peut avec « une petite force lever un fardeau fort puissant », l'idée claire du principe du travail virtuel et la notion du travail d'une force.

Descartes s'est beaucoup intéressé à l'optique, et cela dans le but pratique d'améliorer la construction des lunettes. Vers 1625, il possède la loi de la réfraction, que Képler avait été tout près de découvrir et à laquelle était arrivé de son côté l'astronome



hollandais Snellius[1]. Il en déduira d'abord la forme (coniques ou ovales) que doit présenter une lentille pour que l'image d'un point soit rigoureusement un autre point : c'est un joli problème de géométrie, mais Descartes s'illusionne sur l'intérêt pratique de la solution; la découverte par Huyghens des *oculaires achromatiques* devait avoir une toute autre importance pour le développement des observations. Le Traité des Météores apporte d'autre part une théorie du double arc-en-ciel, expliquant remarquablement la formation des deux arcs et leur position, mais non les couleurs du spectre. Les idées de Descartes sur la nature de la lumière restent assez vagues; ses raisons pour la réfraction (vitesse plus grande dans le milieu le plus dense) choquent justement Fermat qui retrouve la loi des sinus à partir du fécond principe du chemin minimum.

Une autre branche de la Physique était l'objet, vers la même époque, d'expériences et de développements intéressants : c'est l'étude des fluides. Toricelli, par l'expérience qui montrait l'ascension du mercure dans un tube barométrique, précisa le premier le rôle que joue la pression atmosphérique dans la théorie des pompes hydrauliques. L'idée de rechercher « si le vif-argent monte plus haut dans le tuyau étant au pied de la montagne, et de combien » fut, semble-t-il, suggérée à Pascal par Descartes. On sait le succès de l'expérience réalisée, au Puy-de-Dôme, par Périer, reproduite aux tours de Notre-Dame de Clermont, puis, par Pascal, à la Tour Saint-Jacques. Un peu plus tard, dans son *Traité de*

1. L'accusation de plagiat, qui fut portée à ce sujet contre Descartes, ne doit pas être retenue.

l'équilibre des liqueurs, Pascal posait la notion de transmission des pressions dans un fluide, et donnait le principe de la *presse hydraulique.* L'invention de la machine pneumatique (Otto de Guericke) donna une grande impulsion aux travaux sur ces questions, aussi bien en France qu'en Angleterre ou en Italie : à la fin du siècle, les lois de compressibilité des gaz (Boyle et Mariotte), celles de dilatation par la chaleur, étaient assez bien connues.

Passant à l'astronomie, nous détacherons, entre beaucoup d'autres, les noms de trois savants : *Picard*, *Rœmer* et *Cassini.*

Jean Picard qui remplaça *Gassendi* dans la chaire d'astronomie du Collège de France représente l'astronomie de mesures. « Son principal titre à l'estime et à la reconnaissance des astronomes est l'application qu'il fit des lunettes à la mesure des angles et le plan qu'il forma en conséquence d'un nouveau système d'observations, pour déterminer les lieux apparents des astres par leurs passages au méridien, à l'aide du pendule nouvellement inventé par Huygens. » Sous sa direction fut faite la première mesure moderne de la terre (entre Paris et Amiens).

Le Danois *Olof Rœmer* s'illustra par la mesure de la vitesse de la lumière qu'il obtint en 1675 au moyen des éclipses des satellites de Jupiter. Il fut l'élève et l'ami de Picard, qui avait pu l'apprécier au cours d'un voyage à Uranibourg[1] et qui l'avait ramené à Paris.

A peu près dans le même temps que Rœmer, *Cassini*, qui jouissait déjà d'une grande réputation et qui avait été recommandé à Colbert par Picard,

1. Picard était allé y retrouver la position de l'ancien observatoire de Tycho.

venait à Paris où il se fixait définitivement. Il représentera plutôt l'astronomie d'observation (on ne peut encore parler d'astronomie *physique*) et ses principales découvertes sont celles de la lumière zodiacale, des satellites de Saturne, de la rotation propre des planètes. Il représente aussi un peu l'astronomie pour les gens du monde et cela peut expliquer — sans les justifier — les sévérités de Delambre à son égard.

Nous avons enfin réservé pour la fin de ce paragraphe, les travaux d'un savant qui, en tout ce qui concerne les mathématiques appliquées, dépassa grandement ses contemporains et dont les découvertes concernent les questions les plus diverses : Christian Huyghens, né à La Haye en 1629, mort dans la même ville en 1695. Rappelons qu'il fut au nombre des savants appelés à Paris à l'époque de la fondation de l'Académie; il dut quitter la France en 1681, à l'époque de la Révocation de l'Edit de Nantes.

Les travaux principaux de Huyghens peuvent se répartir sous trois rubriques : Astronomie, Mécanique et Optique.

Les premiers ont pour origine les perfectionnements qu'il apporta à la taille des objectifs. Il peut ainsi réaliser des lunettes meilleures que celle de Galilée et donner l'explication des apparences de l'anneau de Saturne, dont il avait aussi découvert un satellite. Pour ses observations astronomiques il applique le pendule à la mesure du temps et réalise une horloge basée sur ce principe[1] (1658). Son traité *Horologium*

1. Plus tard il proposait, pour régler le mouvement des montres, l'emploi du ressort spiral.

oscillatorium, publié en 1673, renferme d'importants développements de mécanique rationnelle. L'étude du mouvement d'un grave sur des plans diversements inclinés, sur des courbes, est faite géométriquement à partir de la relation entre vitesse et hauteur de chute : Huygens reconnaît le tautochronisme du pendule cycloïdal et, pour sa réalisation pratique, est amené à développer la théorie des développés et développantes. Il détermine aussi la force centrifuge dans un mouvement circulaire et se trouve ainsi fort près des découvertes de Newton. Enfin, il fait la théorie du pendule composé, arrivant à la détermination correcte du centre d'oscillation.

Un autre traité de Huygens concerne la théorie du choc.

En optique enfin Huygens s'est occupé de la théorie de la lunette mais son ouvrage le plus important est le *Traité de la Lumière* imprimé en 1690. C'est, en germe, la *théorie des ondulations* qui ne devait triompher que plus d'un siècle plus tard avec *Young* et *Fresnel*. Théorie encore imparfaite puisqu'il y manque tout ce qui se rapporte à la périodicité des phénomènes lumineux; théorie déjà féconde, puisque Huyghens en tire l'explication de « l'étrange réfraction du cristal d'Islande[1] ».

1. Ses expériences mettent aussi en évidence, mais sans qu'il sache l'expliquer, le phénomène de la polarisation.

CHAPITRE IV

De Newton à Euler

La période que nous examinons ici embrasse la plus grande partie du XVIIIe siècle et l'histoire des Sciences exactes y présente beaucoup d'unité. En Analyse mathématique, *Newton* et surtout *Leibniz*, ont donné les *directives* et les progrès réalisés sont en puissance dans leurs écrits. En Philosophie naturelle, les théories newtoniennes dominent, malgré la résistance que peuvent opposer les défenseurs du cartésianisme.

Un siècle fut donc nécessaire pour développer les possibilités qu'offrait l'œuvre de deux hommes de génie. Siècle très brillant, mais qui, malgré la valeur des résultats acquis, est peut-être moins intéressant pour nous que le précédent. Enfin, au moment où la *veine newtonienne* s'épuise et où l'invention mathématique va s'exercer dans de nouveaux domaines, l'effort de toute une génération se résume et trouve son expression parfaite dans l'œuvre d'*Euler* et celle de *Laplace*.

§ 1. Newton

Isaac Newton est né près de Grantham, dans le Lincolnshire, à la fin de 1642 et il mourut à Kensington,

près de Londres, en mars 1727. Il fut élève, puis professeur au Trinity-College à Cambridge. En 1699, il obtint la charge considérable de Directeur de la Monnaie et il abandonna son enseignement en 1701.

Toutes ses découvertes sont antérieures à cette date. Elles ne furent publiées (quelques-unes assez tardivement) que par l'insistance de ses amis : *Barrow*, qui avait été son maître à Trinity-College, *Halley*, *Whiston*, *Cotes*. Les répugnances de Newton proviennent de l'horreur qu'il eut pour les discussions scientifiques : les moindres critiques le touchaient et il paraît avoir ressenti très vivement les attaques injustes que lui attirèrent son premier mémoire d'optique (sur la réfraction et la décomposition de la lumière blanche) présenté en 1672, à la Société Royale : « Si je cultive la Physique, écrit-il quelques années après, ce sera pour mon propre plaisir et dans le dessein que mes découvertes ne paraissent qu'après ma mort; car je crois qu'un homme doit se résoudre à ne rien publier de ses idées nouvelles ou se résigner à devenir esclave en les défendant ». Et ailleurs, il se reproche « d'avoir commis l'imprudence d'abandonner un bien si grand que le repos pour courir après une ombre ».

Cet état d'esprit explique que le *calcul des fluxions* de Newton, dont il eut l'idée vers 1665, ne paraisse en un exposé imprimé, que bien après l'invention de Leibniz.

Les revendications de priorité étaient inévitables et le débat acerbe qui suivit attrista les dernières années de la vie des deux savants. Nous n'insisterons pas sur cette controverse que l'on peut trancher en renvoyant les plaideurs dos à dos et partageant

entre eux la gloire d'avoir donné des méthodes générales à l'Analyse infinitésimale.

Avant d'examiner les parties fondamentales de l'œuvre de Newton (méthode des fluxions et théorie de la gravitation universelle) nous donnerons quelques indications rapides sur ses travaux concernant d'autres questions. Algèbre où il apporte des compléments à la théorie des équations (limite du nombre des racines imaginaires, calcul numérique des racines, formules, qui sont connues sous son nom, pour les sommes des puissances semblables). Géométrie : sa classification des cubiques « enumeratio linearum tertii ordinis[1] » donnait un bel exemple de la puissance des méthodes analytiques et la démonstration de l'un des théorèmes énoncés par Newton (toutes les formes de cubiques peuvent dériver, par projection centrale, de types tels que $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$) ne devait être retrouvée que 25 ans plus tard. Optique enfin : nous avons déjà fait allusion à ses études sur la dispersion, qui, s'il laisse échapper la possibilité de réaliser des lentilles achromatiques, le conduisent du moins à une théorie tout à fait complète de l'arc-en-ciel.

On sait que Newton a développé, en ce qui concerne la nature de la lumière, l'hypothèse de l'émission. Il peut sembler qu'il était donc, à cet égard, moins bien inspiré que Huyghens, qui répugne à voir, dans les phénomènes lumineux « le transport d'une matière, qui viendrait à nous ainsi qu'une balle ou une flèche traverse l'air » et qui conçoit « l'extension de la lumière » par analogie avec celle du son. Mais il faut dire que l'hypothèse de l'émis-

1. Imprimé en 1704 en appendice à l'*Optics*.

sion *s'imposait*, en quelque sorte, au temps de Newton, comme donnant, le plus immédiatement, la théorie des phénomènes alors connus. La première donnée de l'expérience est la notion du rayon lumineux, intuitivement très claire, mais fort délicate à éclaircir du point de vue des ondulations : aussi, de nos jours encore, développe-t-on l'optique géométrique élémentaire, sans parler d'ondes lumineuses. Le point de vue de l'émission pourrait d'ailleurs nous réserver pour l'avenir des retours inattendus[1].

Quoiqu'il en soit, on ne saurait rendre Newton responsable de ce que *sa* théorie étouffe, au XVIIIe siècle, quelques tentatives pour revenir aux idées de Huyghens. Les admirateurs de son génie attribuent une valeur définitive à des hypothèses qui, dans l'esprit de Newton, était seulement les plus commodes, et que sa modestie était fort loin de présenter comme donnant le dernier mot de la recherche. Des remarques assez analogues pourront être faites à propos de la découverte de la loi de l'attraction universelle : *hypotheses non fingo* déclare Newton, et il se rend compte, aussi bien que ses adversaires, qu'il apporte un *fait* et non une explication de la gravitation. Mais l'idée, qui fut d'ailleurs féconde, que toute la physique mathématique doit se réduire, en dernier ressort, aux actions à distance, n'eût sans doute pas eu son approbation.

Cette loi de la gravitation, qui restera le plus beau titre de gloire de Newton, est dégagée dans ses

1. Nous faisons allusion ici aux vues sur l'identification de la matière et de l'énergie et sur la théorie des quantas d'énergie. La plupart des difficultés de la physique mathématique moderne viennent de la notion d'éther, support des ondes lumineuses. Mais toute théorie nouvelle doit garder, de l'optique ondulatoire, la notion de périodicité.

Principia (*Philosophiae naturalis principia mathematica*) publiés en 1687.

L'ouvrage en question doit nous retenir au double point de vue de la mécanique et de l'astronomie. Il s'ouvre en effet par un exposé des principes de la dynamique, où il faut remarquer la manière concrète dont se présentent, avec pourtant toute leur généralité, les concepts fondamentaux. Notion de masse, qui se rattache à celle de poids « dont j'ai trouvé par des expériences très exactes sur les pendules qu'ils sont proportionnels aux masses[1] ». Notion de force (*vis impressa*) qui est l'action par laquelle l'état du corps est changé, que cet état soit le repos ou le mouvement uniforme en ligne droite. Notion de repères absolus : temps vrai que l'*équation du temps* astronomique dégage de l'inégalité des jours naturel; mouvement vrai qui se distingue du mouvement relatif par les causes « car le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même; au lieu que son mouvement relatif peut être produit ou changé sans qu'il éprouve l'action d'aucune force (en agissant sur les corps par rapport auxquels on le considère) » et par les effets « qui sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement » Nous voudrions que les citations précédentes puissent donner une idée de l'heureux équilibre qui se manifeste dans les *Principia*, équilibre entre la vision concrète et la puissance d'abstraction.

Le système astronomique de Newton est le cou-

1. En un même lieu. Newton, qui a précisé la différence entre les deux notions, insiste ailleurs sur ce que le poids varie avec la distance au centre de la terre.

ronnement des efforts qui se poursuivent depuis Copernic. Il n'est sans doute pas le premier à avoir pensé à une attraction inversement proportionnelle au carré de la distance : *Boulliaud* en parle dans son *Astronomie Philolaïque* (1645), mais pour en tirer des conséquences fausses sur les temps des révolutions. Ce qui appartient d'abord en propre à Newton, c'est la démonstration de l'identité entre la gravité et la force qui retient la lune (ou tout autre astre) sur son orbite. C'est ensuite la solution du problème — problème difficile et auquel s'étaient attaché vainement quelques savants contemporains — d'expliquer par l'attraction les orbites elliptiques. Enfin, les théorèmes sur l'attraction des couches sphériques homogènes viennent donner toute leur rigueur à des considérations où des corps du système solaire avaient été assimilés à des points matériels. Ce magnifique ensemble apportait enfin des raisons décisives — et non plus seulement des raisons de commodité — en faveur de la théorie héliocentrique[1].

Bien que la méthode d'exposition des *Principia* soit le plus souvent géométrique, les perfectionnements que Newton avait apportés au calcul infinitésimal ont eu sûrement un grand rôle pour l'élaboration du livre. Ces perfectionnements consistent à la fois dans l'établissement d'un système de notations qui apporte en ces questions l'avantage des procédés analytiques, dans la meilleure liaison des résultats et la plus grande généralité des concepts[2]. Il semble que Newton ait trouvé son point de départ

1. A ce sujet le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de Sageret, *Le système du monde des Chaldéens à Newton*, dernier chapitre.

2. Toutes choses d'ailleurs à quoi de bonnes notations ne sont pas indifférentes.

dans les travaux de Wallis en obtenant le développement général d'un binome (vu d'abord en des cas particuliers) et en en tirant de nombreuses quadratures par séries. Puis il atteint les notions générales de fonction continue, conçue comme engendrée par un mouvement (fluente), de vitesse ou dérivée (fluxion de fluente), et il traite les deux problèmes inverses « la relation des fluentes étant donnée, trouver la relation qui lie leurs fluxions » et d'autre part, remonter d'une relation entre fluxions à la relation des fluentes.

Ses notations pour les différentielles sont un peu moins pratiques que celles de Leibniz qui furent définitivement adoptées. Si pourtant on fait abstraction de quelques détails, c'est bien la même réforme qu'apportent en cette aube du xviiie siècle, deux esprits aussi différents que Newton et Leibniz.

§ 2. Leibniz. L'analyse infinitésimale au XVIIIe siècle.

Leibniz naquit en juin 1646, à Leipzig, et mourut en 1716 à Hanovre. On sait qu'il fut d'abord au service de l'électeur de Mayence; des missions diplomatiques l'amenèrent alors à séjourner à Paris en 1672, à Londres l'année suivante. Il s'attacha ensuite au duc de Brunswick et occupa, de 1676 à sa mort, le poste avantageux, et qui comportait des loisirs, de conservateur de la Bibliothèque de Hanovre.

Au point de vue de son activité scientifique qui doit seule nous occuper ici, le voyage à Paris — où il connut Huyghens — eut probablement une grande importance. Cinq ans après, il est en possession de sa méthode infinitésimale et l'essentiel de ses tra-

vaux mathématiques parut, de 1683 à 1692 dans les *Acta eruditorum* de Leipzig, une des premières revues scientifiques, qu'il avait contribué à fonder.

La découverte de Leibniz procède directement des études antérieures, sur le problème des tangentes : vue générale et intuitive de la méthode, qui éclaire singulièrement le problème inverse et en dégage toute la portée. Les règles de calcul des différentielles, pour lesquelles il introduit les notations Dx, Dy, sont posées dans son mémoire de 1684 et il faudrait pouvoir insister, plus que nous ne le pouvons ici, sur les applications géométriques ou autres qu'il en tire (théorie des enveloppes, équation intrinsèque de la chaînette, par exemple).

En ce qui concerne, par ailleurs, la signification de la réforme leibnizienne pour le développement de l'Analyse, nous devons d'abord renvoyer le lecteur à ce qui a été dit, au paragraphe précédent, à propos de Newton. Les notations de Leibniz étaient les plus souples et méritaient d'être préférées — ce qui est effectivement arrivé. Mais il serait injuste de rapporter à l'incommodité du calcul des fluxions, l'infériorité relative de l'Ecole anglaise du XVIIIe siècle. La vérité est que Newton, plus que Leibniz peut-être, écrase ses disciples immédiats et, d'autre part, l'isolement où resta l'école anglaise après la polémique sur l'invention du nouveau calcul fut très regrettable. A l'avantage de Newton, il faut noter, qu'il est plus près d'envisager systématiquement les infiniment petits comme *rapports*, ce qui est une bonne façon rigoureuse de préciser les conditions de leur emploi. Les études mathématiques de Leibniz sont à la base de toute sa métaphysique, dont nous n'avons pas à parler ici. Nous nous contenterons de même d'une simple allusion

aux nombreuses discussions philosophiques qui portent sur les principes du calcul infinitésimal : leur bénéfice scientifique peut être mince, mais elles eurent du moins l'avantage d'intéresser « le grand public » aux nouvelles idées.

Après Newton, nous avons à citer, en Angleterre, Cotes (1682-1716), dont la vie très courte fut surtout occupée par la publication d'une seconde édition des *Principia*; Taylor (1685-1731) à qui remonte la formule générale pour le développement en série d'une fonction quelconque; *Moivre* (1667-1751) d'une famille protestante française, qui est l'un des premiers à avoir appliqué les imaginaires en trigonométrie, et dont le nom appartient aussi à l'histoire du calcul des probabilités; *Mac Laurin* enfin (1698-1746) qui donne un important *Treatise on fluxions* où il signalait en particulier les rapports entre convergence des séries et convergence des intégrales.

A la même époque l'œuvre de Leibniz était défendue et parachevée par un certain nombre de savants, entre lesquels se détachent d'abord les deux premiers Bernoulli[1] : *Jacques Bernoulli* (1654-1705) qui enseigna jusqu'à sa mort dans sa ville natale de Bâle et *Jean Bernoulli* (1667-1748) qui enseigna d'abord à Groningue puis remplaça son frère à Bâle. Nous retrouverons Jacques à propos de son « *ars conjectandi* » (1713) en examinant le calcul des probabilités; en analyse, sa contribution concerne surtout les applications géométriques (spirale logarithmique et problème des isopérimètres) et mécaniques (figure d'équilibre d'un fil pesant, d'une tige élastique, d'une voile tendue par le vent). Jean Bernoulli, qui eut le rôle primordial dans la généralisation

1. Il y eut au XVIIIe siècle une dynastie de Bernoulli neveux et petits-neveux du premier.

des notations leibniziennes, fait entrer la trigonométrie dans l'analyse et établit les relations entre exponentielles et fonctions circulaires qui résultent de l'emploi des imaginaires. Un des premiers élèves de Jean Bernoulli fut le Français *de l'Hospital, marquis de Saint-Mesme* (1661-1704), mathématicien fort distingué, qui, dans son « Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes », 1696, donnait un premier, excellent et très répandu traité du calcul différentiel, *divulguant* ainsi des méthodes qui étaient encore réservées à quelques *initiés.*

Les limites restreintes de cette étude nous obligent ici à passer sous silence les noms de maints mathématiciens, qui ont eu leur part dans les progrès de l'analyse et nous achèverons ce paragraphe en donnant ici quelques indications sur les travaux de *Clairaut*, d'*Alembert* et *Euler.* Nous les retrouverons tous trois en examinant le développement de l'Astronomie (science à laquelle Clairaut apporte une très notable contribution) ou de la Mécanique (où d'Alembert doit être cité le premier).

Clairaut (1713-1765) était le second d'une famille de vingt-et-un enfants. Son père enseignait les mathématiques et le fils montra la plus remarquable précocité : les portes de l'Académie s'ouvrirent à lui avant l'âge qu'imposait le règlement, pour un mémoire sur l'étude analytique des courbes à double courbure. Ce sujet était à peu près neuf et l'auteur n'avait que seize ans.

En analyse pure, on peut se contenter de retenir les « recherches générales sur le calcul intégral » (1739) puis le mémoire « sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre » (1740). Clairaut y reconnaît que les dérivées

partielles prises par rapport à plusieurs variables ne dépendent pas de l'ordre de dérivation et en déduit la notion de facteur intégrant et ses importantes applications, aussi bien pour les équations différentielles ordinaires que pour celles aux différentielles totales. La notion si essentielle de *facteur intégrant* se trouve aussi, dès 1735, dans Euler, mais les travaux des deux savants sont indépendants.

D'*Alembert* (1717-1783) est bien connu comme collaborateur de la grande Encyclopédie, et par son traité de dynamique. Dès maintenant nous avons à rappeler ses travaux sur l'intégration des fonctions élémentaires, auxquels il faut rattacher son essai de démonstration du théorème fondamental de l'algèbre[1]. Il a été le premier à envisager des équations différentielles simultanées et aussi (à propos du problème des cordes vibrantes) des équations aux dérivées partielles.

Euler enfin (1707-1783) a été le « prince » des mathématiciens de son temps. Il étudia les mathématiques avec Jean Bernoulli, dans sa ville natale de Bâle. On sait qu'il séjourna d'abord en Russie (peu de temps après la fondation par Catherine Ire de l'Académie de Saint-Pétesbourg), puis passa 25 ans en Prusse où il avait été appelé par Frédéric II et où il fut Directeur de la classe mathématique de l'Université de Berlin. Il revint enfin à Saint-Pétersbourg qui était de nouveau, sous le règne de la Grande Catherine, un important centre intellectuel. Bien qu'il fût devenu aveugle en 1766, son activité scientifique ne cessa qu'avec la mort.

1. Énoncé par Euler dans une lettre de décembre 1742 et qui avait un rôle essentiel pour l'intégration, par décomposition en éléments simples, de toute fraction rationnelle.

Il n'est peut-être pas un savant qui ait laissé une masse plus considérable d'écrits (mémoires ou traités portant sur toutes les branches des mathématiques), et c'est ce qui a empêché d'aboutir le projet, deux fois tenté, de publier ses œuvres complètes[1].

Euler a repris à peu près toutes les connaissances scientifiques de son temps, effectuant un travail de coordination où il n'est pas moins remarquable que dans l'invention. Ses ouvrages d'analyse « *Introductio in analysin infinitorum* » (1748) puis « *Institutiones calculi differentialis* » (1755), suivies de 1768 à 1770 des « *Institutiones calculi integralis* » donnent dans leur ensemble presque tout ce qui est, encore aujourd'hui, le fond de tout enseignement mathématique, et, dans tout cela, sommation des séries et développement des fonctions élémentaires, applications géométriques, réduction et transformation des intégrales, types courants d'équations différentielles, la part personnelle d'Euler est considérable. Il faut ajouter que bien des parties de cette œuvre font prévoir l'étonnante extension — en surface et en profondeur — des sciences exactes pendant le XIX[e] siècle. A propos de quelques problèmes classiques à l'époque (courbes isopérimètres, brachistochrone, etc...), Euler pose les principes du calcul des variations qui a pris de nos jours tant d'importance. Il consacre un traité (Einleitung zur Algebra, 1770) à l'Algèbre et la théorie des nombres (analyse indéterminée), sujet qui avait été presque entièrement laissé de côté depuis Fermat.

Diverses discussions qui s'engagent à ce moment présagent d'ailleurs aussi des progrès futurs. L'une d'elles concerne les séries divergentes que la plupart

1. Le projet a été repris, en 1909, par la Société helvétique des Sciences naturelles et il est en voie de réalisation.

des géomètres du XVIII[e] siècle (et Euler lui-même[1]) utilisaient sans hésitation et d'Alembert a l'occasion de faire des réserves (qui se préciseront avec Abel et Cauchy) sur l'emploi de telles séries. Une autre discussion fort intéressante a son origine dans l'étude des cordes vibrantes et porte sur le concept général de *fonction* : on distinguait plus ou moins implicitement, au XVIII[e] siècle, entre fonctions susceptibles d'une représentation analytique et fonctions empiriques; la solution donnée par d'Alembert pour le problème en question, amenait à des fonctions arbitraires qu'il pensait devoir être du premier type, alors qu'Euler était d'un avis opposé. Et, comparant la solution de d'Alembert à celle de Daniel Bernoulli — qui procédait par un développement trigonométrique, Euler se rend bien compte que la question se pose (à laquelle il n'ose répondre affirmativement) de savoir si une fonction quelconque peut être représentée par une telle série.

§ 3. Calcul des probabilités. Mécanique et Mécanique céleste.

Les progrès concernant ces diverses disciplines sont très étroitement liés à ceux de l'analyse et nous retrouverons dans ce paragraphe la plupart des savants dont il a été question précédemment.

1. La série divergente la plus simple et l'une des premières qui eut été introduite est la série $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ à quoi se réduit pour $x = 1$ le développement des $\frac{1}{1+x}$. Euler n'hésite pas à prendre égale à 1/2 la somme de cette série : « si, par un calcul quelconque, on est conduit à la série, le résultat du calcul est 1/2 ». A ce propos, et pour l'histoire de l'emploi des séries divergentes, le lecteur se reportera au chapitre premier des *Leçons sur les séries divergentes*, de E. Borel, Gauthier-Villars, éd., 1901.

Huyghens avait publié, dès 1657, un traité systématique du calcul des probabilités, où il utilisait surtout les travaux de Fermat et de Pascal. C'est d'autre part, à la fin du XVIIe siècle que l'on a l'idée des premières applications *statistiques* et que l'on envisage, par exemple, l'application du calcul aux probabilités de la vie humaine : l'astronome *Halley* publie, pour cet objet, les premières *tables de mortalité*; mais les progrès du calcul des probabilités pendant le XVIIIe siècle dépendent surtout de ce que les hommes de science, et aussi le grand public, portent un vif intérêt aux controverses concernant divers problèmes célèbres (paradoxe de Saint-Pétersbourg) et aux discussions philosophico-scientifiques, qui vont contribuer à fixer la valeur théorique et pratique de la probabilité. S'il s'agit là, quelquefois, de jeux de l'esprit et d'un délassement à des études plus sévères plutôt que d'une véritable science, il ne faut pas oublier que c'est seulement « grâce à l'intérêt qu'ont porté à ces questions des savants illustres que la théorie s'est trouvée prête au moment où on en a eu besoin pour de nombreuses applications pratiques et scientifiques ».

Dans les premières années du siècle paraissent trois ouvrages notables sur les probabilités : un traité de *Montmort*[1] qui développait de nombreuses applications à la théorie des jeux (1708), *The doctrin of chances* d'Abraham de Moivre (1711) et enfin l'*Ars conjectandi* de *Jacques Bernoulli*, ouvrage posthume publié seulement en 1713.

Dans le traité de Moivre, qui fut perfectionné en trois éditions successives, il faut surtout noter la

1. Qui vécut à Paris (1678-1719).

théorie des suites récurrentes et l'intégration, fort élégante, des équations linéaires aux différences finies et à coefficients constants. Le théorème fondamental d'après lequel, lorsqu'on fait un grand nombre d'épreuves, un événement déterminé se produit en moyenne le nombre de fois qu'indique sa probabilité théorique, fut posé par Jacques Bernoulli. De Moivre y ajoute un complément important, en donnant une expression de la probabilité pour que la différence entre fréquence théorique et fréquence observée soit contenue dans des limites données.

Par la suite, et en se limitant aux développements les plus originaux, il faut mentionner les travaux de *Bayes*, qui pose les premiers principes de la théorie de la probabilité des causes — plus tard développée par *Laplace* — et les travaux de *Daniel Bernoulli*[1] qui introduit la notion souvent commode d'espérance mathématique et qui voulant rendre compte, non seulement de la valeur d'un gain possible et de sa probabilité, mais encore de l'intérêt que présente ce gain pour le joueur, définit, d'une façon fort ingénieuse, la notion d'*espérance morale.* L'essai de *Condorcet* sur la détermination des chances d'erreurs dans les décisions rendues à la majorité (1785) n'est pas non plus sans originalité ! Mais l'auteur s'illusionne singulièrement sur la valeur de ses calculs, et on ne peut que souscrire au jugement sévère qu'a porté *Joseph Bertrand* sur ce « *scandale mathématique* ». Nous terminerons cette revue rapide en signalant que Daniel Bernoulli tente de formuler une théorie cinétique des gaz : tentative assez heureuse

1. Neveu de Jacques Bernoulli (1700-1782).

et riche de promesses bien qu'il manque encore à Bernoulli la loi fondamentale sur la répartition probable des vitesses des molécules.

En mécanique, aussi bien qu'en ce qui concerne les théories du hasard, le XVIIIe siècle est une période de vives controverses à propos des principes. Ces discussions ont pu contribuer à dégager les concepts fondamentaux de la gangue métaphysique qui les enrobait. Elles ont un intérêt scientifique inégal et quelques-unes sont, comme le dit d'Alembert, « d'une parfaite inutilité pour la mécanique[1] ».

Le débat le plus célèbre (débat auquel s'applique la citation précédente) fut celui que souleva Leibniz et qui portait sur l'évaluation de la « force des corps en mouvement », les uns estimant que cette force est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse, les autres qu'il faut l'exprimer par le produit de la masse par le carré de la vitesse (force vive). A l'origine du débat il y eut peut-être l'idée, plus ou moins inconsciente, de donner toute l'unité possible aux principes de la science. L'intention était donc louable, mais comme, suivant les questions traitées, c'est le produit mv (dans les questions d'équilibre ou de choc) ou le produit mv^2 (en dynamique générale) qui joue le rôle fondamental, la querelle ne pouvait plus consister que « dans une discussion métaphysique très futile, ou dans une dispute de mots plus indigne encore d'occuper des Philosophes[2] ».

Il est plus intéressant de relever la tendance, très générale au XVIIIe siècle, d'attribuer aux principes

1. *Traité de Dynamique*, 2e édition 1758, dans le discours préliminaire.
2. *Discours préliminaire.*

une valeur absolue en repoussant ce qui pourrait « ruiner la certitude de la mécanique et la réduire à n'être plus qu'expérimentale ». Bien significatifs à cet égard sont les commentaires auxquels donne lieu la question de concours posée, en 1758, par l'Académie de Berlin : si les lois de la statique et de la Mécanique sont de vérité nécessaire ou contingente. D'Alembert, par exemple, n'hésitera pas à répondre qu'il s'agit de vérités nécessaires « non pas « en ce sens que le Créateur n'eût pu établir des lois « toute différentes, mais en ce qu'il n'a pas jugé à « propos d'en établir d'autres que celles qui résul- « tent de l'existence même de la matière ». On voit le rapprochement qui se dessine ainsi entre la géométrie — où tout découlerait de la seule notion d'espace — et la mécanique, qui se conduirait déductivement sur les données de la matière et du mouvement.

Nous pouvons avoir aujourd'hui des idées assez différentes sur le rôle que joue l'expérience en mécanique — et même en géométrie. L'illusion de d'Alembert et de plusieurs autres, était toute naturelle (et même utile) au moment où l'on reconnaissait la valeur d'une théorie mathématique de ces questions.

Si, laissant ces généralités, nous passons maintenant à la matière même des recherches sur l'équilibre et le mouvement, le premier nom que nous ayons à citer est celui d'un contemporain de Newton, *Pierre Varignon* (1654-1722) qui fut professeur au Collège royal et membre de l'Académie des Sciences. Il s'est fait une place honorable parmi les premiers défenseurs du calcul infinitésimal, mais il faut surtout retenir de lui son « *Projet de nouvelle Mécanique* » publié en 1687, l'année même où parurent les *Prin-*

cipes. Varignon se rencontre avec Newton pour rattacher la composition des forces à celle des mouvements que produisent ces forces[1]; son « projet » édifie la statique en faisant jouer un rôle essentiel à la règle du parallélogramme. Divers détails de l'exposition y sont heureux : ainsi le théorème sur *les moments* qui a gardé le nom de Varignon. Le *projet* laisse au second plan le fécond principe du travail virtuel; c'est pourtant dans la *Nouvelle Mécanique* du même auteur (1725) que l'on trouve, en une lettre de Jean Bernoulli, le premier énoncé général du dit principe. Ajoutons enfin que, en 1725, Daniel Bernoulli relève l'insuffisance rationnelle des démonstrations, du type de celle de Varignon, pour la règle du parallélogramme. Il croit faire mieux et établir sans conteste qu'il s'agit d'une vérité nécessaire : sa démonstration, qui fut reprise par Poisson (c'est la méthode dite fonctionnelle), consiste à caractériser la composition géométrique des forces par quelques propriétés simples, que l'on admet volontiers, mais qui n'ont, bien entendu, aucun caractère de nécessité.

Dans les questions de *Dynamique*, la relation fondamentale entre force et accélération était le plus souvent mise en œuvre par des procédés géométriques. Newton, à cet égard, avait donné l'exemple et ce n'est guère qu'avec la Mécanique d'Euler (1736) ou le Traité des fluxions de Mac Laurin, que s'introduisent assez systématiquement les méthodes analytiques.

1. Cette idée se retrouve aussi, et sous une forme peut-être plus satisfaisante, chez un autre contemporain, le père Lamy. Cf. pour plus de détails sur le sujet, Duhem, *Les Origines de la statique*, t. II, p. 255-259.

L'intérêt du théorème de la force vive, qui donne ce que nous appelons maintenant une intégrale première des équations du mouvement, apparaît très vite : c'est déjà ce théorème qu'utilisent Huyghens, puis Jacques Bernoulli pour étudier le pendule composé. Jean Bernoulli, subissant l'influence de Leibniz, y voit une loi fondamentale de la nature; Daniel Bernoulli en donne un énoncé fort général, pour le cas de corps animés par des attractions mutuelles quelconques, et en fait d'élégantes applications à l'étude du mouvement des fluides.

Le théorème de la force vive ne fournit qu'une équation et ne peut donc suffire à déterminer le mouvement que dans le cas particulier d'un système à liaisons complètes. Il manquait encore une *méthode générale* permettant la mise en équation du problème de mouvement d'un système à liaisons quelconques et donnant *toutes* les équations. Les géomètres du XVIIIe siècle y suppléaient, il est vrai, par des artifices, particuliers à chaque cas, et où se révèle toute leur ingéniosité. Mais le pas décisif est réalisé par d'Alembert qui apporte, dans son Traité de Dynamique (1743) cette *méthode générale* en réduisant (du moins pour ce qui concerne la mise en équations) le problème de dynamique à des questions de statique. Bien que la méthode en question ne prenne toute sa valeur qu'associée, par Lagrange, au principe statique des vitesses virtuelles, on peut déjà, dans l'œuvre de d'Alembert, en apprécier toute la fécondité : dans le Traité de Dynamique qui vient d'être cité, le théorème de la force vive ne figure plus que comme une conséquence du « principe général pour trouver le mouvement de plusieurs corps « qui agissent les uns sur les autres d'une manière

« quelconque » et le même principe conduit aux lois du mouvement du centre de gravité, dans des cas plus généraux que ceux qui avaient été envisagés par Newton; d'Alembert en fait aussi usage dans les recherches qui fondent l'hydrodynamique (*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, 1744; *Essai sur la résistance des fluides*, 1752); il en fait enfin application à l'étude du mouvement d'un solide autour d'un point fixe, apportant la première solution du problème de la précession des équinoxes « longtemps et inutilement cherché par de très grands géomètres ».

D'autres principes, plus ou moins importants pour l'organisation de la Mécanique rationnelle ont été découverts à la même époque. La loi des aires, qui avait été obtenue expérimentalement par Képler, puis expliquée théoriquement par Newton, dans le cas particulier du mouvement elliptique, est établie sous une forme plus générale, àpeu près simultanément, par Daniel Bernoulli, Euler et d'Arcy (1746-1747). *Maupertuis* (1698-1759), en cherchant à concilier les vues de Fermat sur la réfraction avec la théorie newtonienne de l'émission est conduit à énoncer le principe de la moindre action et en fait plusieurs applications. Ces applications restent assez incertaines et Maupertuis attribue à son principe une valeur métaphysique qui est bien discutable. Quelques contemporains ne se firent pas faute de le remarquer — mais mieux vaut passer sous silence la querelle qui suivit et qui éclaire d'un jour plutôt fâcheux certains milieux « scientifiques » du XVIIIe siècle. L'intérêt théorique du principe de moindre action est d'ailleurs assez mince et son intérêt historique est surtout dans les développements que lui

donnèrent Euler, puis Lagrange, en utilisant les méthodes du calcul des variations.

En passant en revue les travaux de Newton, nous avons eu l'occasion de voir comment c'est l'étude des mouvements planétaires qui l'a conduit à poser les bases de la Mécanique rationnelle. Les progrès réalisés par cette dernière science, ou même par l'analyse pure, ont leur répercussion immédiate sur le développement de la théorie newtonienne de l'univers. La présente période qui est celle où s'organise la Mécanique rationnelle, est aussi celle où se constitue la Mécanique céleste et où s'ébauchent les synthèses que réaliseront, un peu plus tard, Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, Laplace dans son *Exposition du système du monde* et dans sa *Mécanique céleste*. Les sujets de concours proposés par l'Académie des Sciences de Paris sont pour beaucoup dans les progrès que fait alors l'Astronomie théorique, avec Euler, D. Bernoulli, d'Alembert, et surtout Clairaut. Le problème des trois corps est ainsi étudié par Euler, dans le cas du mouvement de Saturne et de Jupiter, par Clairaut et d'Alembert dans le cas du mouvement de la lune (1747-1748) : la première approximation laissait inexpliqué, pour une part, le mouvement de l'apside et l'on put croire un instant à la nécessité de compléter la loi de Newton, en y ajoutant des termes, dépendant de puissances supérieures de la distance; c'est Clairaut qui leva la difficulté en montrant qu'il suffisait de pousser l'approximation jusqu'au 3e ordre pour rendre compte des observations.

Nous n'insisterons pas ici sur d'autres études analogues : théorie des satellites de Jupiter, étude

du mouvement des comètes et de leur perturbation par les planètes. Mais nous signalerons pour terminer quelques progrès concernant la théorie des marées et diverses études théoriques se rattachant au problème de la détermination de la figure de la terre. La première question fut mise au concours par l'Académie en 1740, et c'est l'occasion des travaux de Mac Laurin, D. Bernoulli et Euler. Le second problème, sur lequel nous reviendrons au paragraphe suivant, amena les célèbres recherches de Clairaut, sur la figure d'équilibre d'un sphéroïde fluide hétérogène, animé d'une rotation autour d'un axe.

§ 4. Progrès de l'expérimentation. Astronomie et Géodésie.

Les travaux dont il va être question concernent, exclusivement, l'Astronomie et la Géodésie. La Physique expérimentale fut pourtant très cultivée au XVIII[e] siècle et, en particulier, les phénomènes de l'électricité statique et du magnétisme éveillèrent une vive curiosité et furent l'objet de nombreuses expériences qui passionnèrent le grand public. Des amateurs éclairés ont leur « cabinet de physique », mettent leur point d'honneur à y réunir les appareils les mieux au point, les plus récents, et contribuèrent ainsi, d'une façon qui n'est pas négligeable, aux progrès de la technique expérimentale. Mais, dans l'ensemble, le bilan de toute cette activité est assez mince : il s'agit le plus souvent de recherches purement qualitatives, et qui restent ainsi tout à fait en marge de l'histoire des Sciences exactes.

En Astronomie, on peut distinguer, en gros, deux écoles principales. L'une à l'observatoire de Paris,

que dirigent, de père en fils, les Cassini: *Jean-Dominique* (1625-1712) puis *Jacques* (1677-1756), *Cassini de Thury* (1714-1784) et, enfin, le *comte de Cassini* qui résigna ses fonctions à la révolution. L'autre en Angleterre, où l'Observatoire royal de Cambridge est dirigé par *Flemsteed*, puis *Halley* (1656-1752) puis *James Bradley* (1692-1762).

Nous avons déjà indiqué les principales découvertes de Cassini Ier. Sa renommée fut considérable, mais il est permis de douter que son influence ait été toujours très heureuse Les développements théoriques ne sont point son fait et il veut parfois ignorer non seulement Newton, mais encore Képler et Copernic[1]. Les méthodes de Picard sont délaissées, pour des recherches « moins utiles mais plus brillantes » et les successeurs du grand Cassini sont loin d'avoir ses rares qualités d'observateur, son endurance et sa ténacité dans l'emploi d'un matériel qui rendait les observations très difficiles et très pénibles[2]

C'est, peut-on dire, l'Ecole anglaise qui reprend les traditions de Picard et on lui doit la découverte la plus importante de ce temps : celle du phénomène de l'*aberration* dont la théorie fut donnée en 1729, par Bradley.

Nous observons non pas la véritable direction des rayons lumineux qui proviennent d'un astre, mais une direction apparente, qui résulte de la composi-

1. En ce qui concerne, par exemple, le mouvement des comètes, Cassini se contente d'imaginer un mouvement rectiilgne et base sur cette supposition grossière ses prédictions du mouvement et de l'apparence des astres.

2. Jusqu'au moment où, après la découverte des verres achromatiques, on put avoir de bons oculaires, il fallait chercher le grossissement dans l'emploi d'objectifs à très longs foyers : Cassini utilise ainsi les lunettes qui atteignaient 45 mètres.

tion du mouvement de la lumière et de celui de la terre; comme la vitesse de la terre a, par rapport aux fixes, une direction variable suivant l'époque de l'année, une étoile paraitra décrire annuellement autour de sa position vraie, une petite ellipse (ellipse d'aberration) Le phénomène se manifeste par des variations annuelles des coordonnées de l'étoile, variations qui devinrent évidentes dès que la précision des observations dépassa la minute d'arc et qui avaient déjà préoccupé Picard. Les patientes et précises recherches de Bradley lui permirent d'établir les lois de ces inégalités et d'en dégager la cause physique[1]. En poursuivant ses observations, Bradley reconnut enfin une autre inégalité (de période 18 ans) dont les effets venaient compliquer les apparences : c'est la nutation de l'axe terrestre due à l'action lunaire. « C'est à ces deux découvertes de Bradley « (aberration et nutation) que nous devons, dit De« lambre, l'exactitude de l'Astronomie moderne. « Sans elles, il était impossible à l'astronome le plus « soigneux de faire accorder ensemble les ascensions « droites observées d'une même étoile à 50 ou 60'' « près et les déclinaisons à une demi-minute. Ce double « service assure à son auteur la place la plus distin« guée après celle d'Hipparque et de Képler, et au« dessus des plus grands astronomes de tous les « âges et de tous les pays. »

1. A propos de la théorie du phénomène, il faut rappeler une remarque antérieure de Descartes, émettant l'opinion que, si la propagation de la lumière n'était pas instantanée, jamais nous ne verrions les astres dans les lieux qu'ils occupent réellement; mais Descartes prétendait en conclure (vu l'accord entre les tables et les observations) que la vitesse de la lumière est infinie. Rien ne prouve que Bradley ait eu connaissance de cette idée de Descartes, qui eut pu le mettre sur la voie de l'explication de l'aberration.

D'autres recherches astronomiques notables, effectuées au XVIIIe siècle concernent la détermination des parallaxes qui permettent de préciser à une échelle terrestre les dimensions du système solaire — question de simple curiosité, sans doute, puisqu'il importe assez peu « même dans les recherches les plus délicates, que l'on fasse le parallaxe solaire de 8'' 5 ou 8'' 7 » et puisque les lois de Képler permettent aisément d'atteindre ce qui est l'essentiel, les distances relatives des diverses planètes au soleil. Question dont l'étude fut très féconde par la collaboration qui dut s'établir entre astronomes des divers pays, par les expéditions lointaines qui eurent cet objet, par tous les développements théoriques et les perfectionnements techniques nécessaires en des recherches aussi délicates.

Nous nous contenterons de rappeler, trop sommairement, la détermination (1672) de la parallaxe solaire par des observations de Cassini Ier à Paris, de Richer à Cayenne; le voyage de Lacaille au cap de Bonne-Espérance, les expéditions françaises ou anglaises entreprises pour observer le passage de Vénus sur le soleil en 1761 et 1769 : Halley, après Képler, avait insisté sur l'intérêt que peut présenter ce dernier phénomène pour la détermination de la parallaxe solaire[1].

Il faut enfin signaler le développement remarquable que prend à la même époque la Géodésie. C'était une science toute récente, puisque la méthode fondamentale de triangulation fut indiquée

1. Le principe consiste à observer, de diverses stations, la longueur de la corde décrite par Vénus sur le disque du soleil : la mesure des temps de passage permet de comparer la longueur des cordes. La précision serait excellente si le début et la fin du phénomène n'étaient fort mal définis.

par Snellius et appliquée par lui en 1617, de façon d'ailleurs assez sommaire. Nous avons déjà rappelé la mesure de Picard (1669) beaucoup plus précise. Elle donnait la longueur de méridienne entre Paris et Amiens, mais on eut immédiatement le désir de compléter le travail en étendant le réseau de triangulation entre Dunkerque et Perpignan : ce fut l'œuvre de Cassini I et de Cassini II, œuvre terminée en 1718 et que les insuffisances de la cartographie à cette époque rendaient urgente.

Les mesures des deux Cassini aboutirent à une conclusion qui était fausse mais qui amena une intéressante polémique et de nouvelles recherches; ils trouvent que les degrés de méridienne diminuent quand on va de l'équateur vers le pôle, ce qui impliquerait, pour la terre, la forme d'un ellipsoïde allongé suivant la ligne des pôles. Ce résultat était en opposition flagrante avec les théories newtoniennes; par suite de la force centrifuge, une masse fluide en rotation aura pour figure d'équilibre un ellipsoïde aplati suivant l'axe de rotation et ce doit être en gros la forme de la terre dont le relief se détache relativement peu de la surface des océans; ajoutons qu'une observation de Richer (1672), notant qu'une horloge réglée pour Paris retarde à Cayenne, s'interprétait tout naturellement par l'effet de la force centrifuge.

Après que bien des arguments, plus ou moins valables, eussent été mis en avant de part et d'autre, on se convainquit de la nécessité de nouvelles mesures décisives et, en 1735, une expédition à laquelle participaient les astronomes *Godin*, *Bouguer* et *de la Condamine* partait pour le Pérou pour y mesurer un arc de méridien, tandis que *Maupertuis* et *Clai-*

raut allaient, dans le même but, en « Lapponie » (au fond du golfe de Bothnie, à l'actuelle frontière de Suède et de Finlande). Maupertuis fut le plus expéditif et s'attribua ainsi le mérite, dont il ne fut pas médiocrement fier, de trancher la question à l'avantage des newtoniens. Avant même le retour de Bouguer (1744) et de la Condamine, Cassini de Thury et La Caille avaient repris les opérations des deux premiers Cassini et vérifiaient à nouveau l'aplatissement.

Tous ces travaux amenèrent, tout naturellement, de nouvelles recherches théoriques, et ce sont les belles études de Mac Laurin, de Clairaut, de d'Alembert concernant l'attraction des ellipsoïdes. D'autre part, les méthodes essentielles de la Géodésie s'en trouvent bien établies; des travaux plus précis, suivront, telle la mesure, par Méchain et Delambre de la méridienne Dunkerque-Barcelone (1792-1798). On sait que cette mesure, entreprise au moment de l'établissement du système métrique, était réalisée dans l'intention d'avoir une unité de longueur « puisée dans le sein même de la nature[1] ». Grâce au *cercle répétiteur* qu'avait inventé *Borda*, les mesures d'angles purent être faites à la seconde. Mais si cette nouvelle mesure remplace avantageusement celles des Cassini, il ne faut pas oublier qu'elle fut grandement facilitée, dans des circonstances plutôt défavorables, par ce fait qu'elle reprenait, entre Dunkerque et Perpignan, un travail déjà fait.

1. Cette expression est de *la Condamine* qui proposait, dans la même intention, la longueur du pendule battant la seconde à l'équateur.

CHAPITRE V

1780-1860

§ 1. Du XVIIIe au XIXe siècle : Lagrange, Laplace, Legendre

Ce n'est pas sans hésitation que nous avons réservé ces trois savants pour le début d'un nouveau chapitre. Leur activité scientifique commence en un temps où vivaient encore Euler et D'Alembert et il y a, des uns aux autres, une évidente filiation. Lagrange et Laplace ont fait leurs découvertes principales avant l'époque de la Révolution française. Mais ils ont tenu ensuite, pendant de longues années, une place si éminente, ils ont exercé, autant par la richesse de leur œuvre que par les élèves qu'ils avaient formés, une influence si heureuse sur le développement ultérieur des Sciences qu'on doit les considérer, et Legendre à leur suite, comme faisant la transition du XVIIIe au XIXe siècle.

D'une époque à l'autre, les conditions du progrès scientifique se sont singulièrement modifiées. C'est, d'abord, une extension notable du champ de la recherche scientifique, extension dont nous signalions déjà quelques indices dans l'œuvre d'Euler[1], qui se précise avec ses successeurs et qui dépend aussi,

1. Chap. IV, p. 115-116.

pour une large part, des progrès réalisés par la physique expérimentale à la fin du XVIIIe siècle et du développement de la Science de l'ingénieur. Mais il faut surtout noter que les questions mathématiques vont intéresser un public beaucoup moins restreint. En France au moins, beaucoup d'écoles spéciales s'étaient organisées au cours du XVIIIe siècle : écoles d'artillerie ou du génie, de marine, des travaux publics et, partout, la base de l'enseignement était une solide culture scientifique et, particulièrement, mathématique. Ces écoles réalisent un milieu tout à fait favorable à l'éveil de nouvelles vocations scientifiques et tel que l'on en chercherait vainement l'équivalent aux périodes précédentes. Elles marquent vraiment les débuts de l'Enseignement supérieur. Les cadres de cet enseignement — en France toujours et grâce à la Révolution — ne vont pas tarder à se préciser : faut-il rappeler, en 1794, la fondation de l'Ecole Polytechnique et le premier essai d'une Ecole normale supérieure ; puis, en 1808, l'organisation définitive de cette école et des Facultés des Sciences et des Lettres ? Lorsque Napoléon écrivait à Lagrange « l'avancement, le perfection« nement des mathématiques sont liés à la prospérité « de l'Etat », il ne faisait qu'exprimer la conviction profonde, et appuyée sur de dures expériences, de toute une génération. De cette génération, les hommes dont nous avons maintenant à parler furent les plus éminents.

Joseph-Louis Lagrange vécut de 1736 à 1814. Il naquit à Turin, sa famille, qui était d'origine française, étant fixée au Piémont depuis plusieurs générations. Ses aptitudes mathématiques se révélèrent vers l'âge de 17 ans et, peu d'années après, nous le

trouvons professeur à l'Ecole d'Artillerie de Turin. Il entre en relations avec Euler en lui soumettant une solution du problème des isopérimètres, solution où Euler reconnut et apprécia la généralité des méthodes. Tandis que, dans les questions de ce genre (détermination de courbes par des propriétés de maximum et de minimum) le procédé d'Euler[1] consistait à remplacer un arc infiniment petit de la courbe par une ligne brisée dont il restait à fixer les sommets en résolvant un problème de maximum ou de minimum ordinaire, Lagrange introduit la notion fondamentale de variation et obtient ainsi une méthode plus analytique, plus rigoureuse et évitant tous les artifices géométriques : son « essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et minima des formules intégrales définies » marque ainsi les débuts d'un développement *autonome* du *calcul des variations.*

Vers la même époque, l'activité scientifique de Lagrange s'appliquait également à d'autres questions : problème des cordes vibrantes, théorie de la propagation du son — où il est assez heureux pour parer aux insuffisances de la théorie esquissée par Newton —. Aussi, sa renommée devient-elle européenne. En 1759 il est nommé membre associé de l'Académie de Berlin et c'est à lui que le roi Frédéric fait appel pour remplacer Euler lorsque (1766) ce dernier quitte Berlin pour Saint-Pétersbourg.

Les vingt ans que dure le séjour de Lagrange à Berlin sont pour lui une période d'intense travail scientifique. Les mémoires qu'il publie dans les recueils académiques de Turin[2], de Berlin, ou de Paris,

1. Qui généralise les essais de Jacques et Jean Bernoulli.

2. L'Académie de Turin a pour origine une « Société privée » fondée par Lagrange avec ses élèves de l'Ecole d'artillerie.

concernent les sujets les plus divers. En *théorie des nombres*, Lagrange obtient les démonstrations de plusieurs théorèmes énoncés par Fermat et il fait faire de grands progrès à l'*analyse indéterminée.* En *Algèbre*, il donne une élégante méthode pour le calcul approché des racines des équations numériques et il développe, en ce qui concerne la résolution générale des équations algébriques, des vues qui font déjà pressentir les découvertes d'*Abel* et de *Galois.* En *Astronomie* il traite des questions posées par l'Académie de Paris : théorie de la libration lunaire, explication des inégalités des satellites de Jupiter et théorie des perturbations des comètes, démonstration touchant l'invariabilité des grands axes et des moyens mouvements planétaires. Et nous laissons ici de côté bien d'autres travaux (en particulier ceux qui concernent le calcul des probabilités), mais nous nous contenterons d'envisager enfin, pour terminer, deux ordres de recherches qui sont des plus importants dans l'œuvre considérable de Lagrange : *théorie des équations aux dérivées partielles, mécanique analytique.* La première théorie était à ses débuts et les travaux de Lagrange l'ont véritablement organisée. Quant à la Mécanique analytique, le traité de Lagrange qui porte ce titre et qui fut composé pendant son séjour à Berlin, reste son plus beau titre de gloire.

Nous avons déjà eu l'occasion de dire que Lagrange, dans ce traité, donne toute leur efficacité aux vues de d'Alembert en les associant au principe du travail virtuel, dont il a dégagé toute la généralité. Toute la Mécanique se trouve ainsi renfermée dans une formule unique à laquelle se rattachent tous les principes connus jusqu'alors et dont les conséquences

se développent avec une admirable clarté. L'ouvrage de Lagrange n'est pas moins remarquable par l'élégance et la portée des méthodes analytiques qui y sont mises en œuvre (méthode des multiplicateurs, transformation des équations de la dynamique sous la forme dite de Lagrange, variation des constantes, application du calcul des variations, etc..) que par son contenu philosophique, et même historique, On a pu depuis poursuivre les théories, un retour à des méthodes géométriques a permis d'en simplifier certaines, mais, dans l'ensemble, la *Mécanique analytique* de Lagrange domine toujours le développement de la mécanique rationnelle actuelle.

Lagrange désirait que son traité fût publié à Paris. L'Abbé Marie, qui était professeur au Collège de France et son élève Legendre, dont nous aurons à nous occuper, s'employèrent aux pourparlers qui furent assez difficiles et assez longs[1] : la *Mécanique analytique* parut seulement en 1788. Lagrange venait de se fixer en France, ayant accepté, après la mort de Frédéric II, l'invitation du gouvernement de Louis XVI, et c'est le début d'une nouvelle période de sa vie.

Il semble qu'à ce moment il se désintéresse presque complètement des Sciences exactes comme si, et c'est un sentiment que son œuvre déjà faite eût pu justifier, il avait épuisé, dans tous les domaines des mathématiques et de leurs applications, les possibilités de son époque. Son intérêt est ailleurs et il suit ainsi, par exemple, avec une curiosité passionnée, les progrès que réalisent en chimie, Lavoisier et ses élèves. La Révolution le trouve membre de la

1. Cf. la notice de Delambre, en tête du premier volume des œuvres de Lagrange.

Commission pour l'établissement d'un nouveau système de poids et de mesures, commission qu'il présida et où il fut parmi ceux dont l'autorité décida l'adoption d'un système purement décimal. Administrateur de la monnaie, membre du bureau des inventions, il passe les années les plus troublées sans être inquiété, vivement ému pourtant par le malheur de certains de ses collègues, par la suspicion où sont tenus plusieurs autres. Lors de la fondation de l'Ecole polytechnique il y est nommé professeur et ces fonctions vont le ramener à l'analyse mathématique.

Pendant les années qui suivent il publiera en effet plusieurs ouvrages notables sur des questions qui, pour la plupart, ont fait l'objet de son enseignement. Sa *théorie des fonctions analytiques* (1797) et ses *leçons sur le calcul des fonctions* (1804) sont à rapprocher, comme tentatives pour fonder l'analyse sans avoir recours à l'intuition infinitésimale. Tentative qui n'a pas eu de suite parce que l'on a pu, au XIXe siècle, donner des bases rigoureuses au Calcul différentiel et intégral; mais il est intéressant de noter que les essais de Lagrange laissent entrevoir par avance, par le rôle qu'il fait jouer à la série de Taylor, le point de vue qui sera développé — après Cauchy — par Weierstrass. Il faut encore citer le traité de la *Résolution des équations numériques* (1798) et le *Mémoire* (1808) *sur la méthode de variation des constantes et ses applications à la mécanique céleste.* Ce dernier mémoire montrait que Lagrange, à l'âge de plus de soixante-quinze ans « n'était pas descendu du haut rang qu'il occupait depuis si longtemps, de l'aveu de tous les géomètres. » C'est l'un de ses derniers ouvrages : lorsqu'il mourut, en 1814,

il préparait une nouvelle édition de la Mécanique analytique.

Le nom de *Laplace* est, peut-être, plus universellement connu que celui de Lagrange parce qu'il évoque le premier essai d'une cosmogonie scientifique : il n'est personne qui ignore l'hypothèse de la nébuleuse primitive, à partir de laquelle Laplace veut expliquer la formation du système solaire, cherchant à rendre compte, par une origine commune, de ce fait que tous les mouvements planétaires ont lieu dans le même sens, avec des orbites sensiblement coplanaires et circulaires. L'« *exposition du système du Monde* » est restée justement classique, malgré les critiques qui ont pu être faites de l'arbitraire des prémisses ou de l'incertitude de certaines suppositions — défauts qui, il faut bien le dire, sont inhérents à toute tentative de ce genre. Mais c'est dans d'autres ouvrages qu'il faut chercher les meilleurs témoignages du génie de Laplace et des raisons valables de l'égaler à son contemporain Lagrange.

Les deux esprits furent très différents. Lagrange a été, peut-être, un mathématicien plus complet et il a laissé, dans tous les domaines de la Science, l'empreinte de son génie. Laplace, moins soucieux d'élégantes synthèses et de méthodes générales, s'est intéressé, avant tout, à la théorie mathématique des phénomènes de la nature. Il a suivi de près des recherches expérimentales, collaborant même avec Lavoisier pour un travail (1780) qui donne les premières mesures de chaleurs spécifiques et de chaleurs de réaction, émettant d'ailleurs à ce propos des idées justes sur la nature de la chaleur. Ses recherches mathématiques ont eu presque toujours pour origine

quelque problème naturel et, tout en s'élevant aux spéculations les plus abstraites, il ne perd jamais de vue les conditions de leur application.

L'ouvrage le plus important de Laplace est son Traité de Mécanique céleste, dont les cinq tomes parurent entre 1799 et 1825; les principaux résultats avaient déjà été publiés par lui dans divers Mémoires présentés à l'Académie des Sciences. Nous en donnerons ici une idée très sommaire.

Un ensemble de recherches, où les travaux de Laplace et ceux de Lagrange se relient étroitement, concerne la « stabilité du système solaire ». Il s'agit des théorèmes d'après lesquels, malgré les actions mutuelles des planètes, un certain nombre d'éléments caractéristiques de leurs orbites ne peuvent varier qu'entre des limites assez étroites : ainsi les grands axes, et c'est Laplace qui, en 1773, reconnut le premier cette propriété fondamentale qui devait faire l'objet d'études ultérieures de Lagrange (nous y avons fait déjà allusion) et aussi de Poisson.

D'autres graves difficultés à la théorie newtonnienne du monde solaire résidaient dans l'explication de l'accélération que manifestent les moyens mouvements de la lune et de Jupiter et du ralentissement du moyen mouvement de Saturne. Il était réservé à Laplace d'apporter l'explication de ces phénomènes troublants[1] : l'accélération du moyen mouvement

1. Pour justifier cette épithète, et pour amuser le lecteur, voici une citation d'Arago (*Œuvres*, t. III, p. 477) : « Ainsi, chose singulière, notre système planétaire semblait destiné à perdre Saturne, son plus mystérieux ornement...; Jupiter... serait allé, par une marche inverse, s'engloutir dans la matière incandescente du soleil; les hommes enfin auraient vu la lune se précipiter sur la terre », catastrophes fort éloignées, de sorte que « ni les dissertations techniques, ni les descriptions animées de certains poètes n'intéressèrent le public. Il n'en fut pas de même des sociétés savantes. Là, on

lunaire est rattaché par lui aux variations de l'excentricité de l'orbite terrestre (1787); les inégalités de Jupiter et de Saturne dépendent de ce que les moyens mouvements sont dans un rapport simple $\frac{2}{5}$; des termes qui sans cela eussent été négligeables prennent alors une valeur notable et il en résulte, pour les mouvements, des inégalités à très longues périodes (980 ans) qui s'accordent avec les observations (1774-1785-1786).

L'étude des perturbations lunaires a permis à Laplace d'obtenir une évaluation indirecte de la parallaxe du soleil. Il en a déduit aussi la valeur moyenne de l'aplatissement du géoïde. Dans un ordre d'idées différent, il a cherché à préciser ce que peut être la vitesse de refroidissement de la terre, en la reliant aux variations éventuelles de la durée du jour et il trouve ainsi que, depuis Hipparque, la température moyenne de notre globe n'a pas varié d'un centième de degré. Détails que tout cela, mais bien caractéristiques de la manière de Laplace, qui reste très positif dans les questions les plus théoriques et qui tire tout le parti possible d'habiles rapprochements.

Toujours en Mécanique céleste nous avons à signaler les travaux de Laplace sur l'attraction, travaux dans lesquels il donne l'équation aux dérivées partielles caractéristique des potentiels et introduit les fonctions qui portent son nom. Il faut enfin parler de ses études sur les *marées* : on avait avant lui les principes d'une théorie plutôt que la théorie elle-même. Laplace établit (1775) une analyse dans laquelle « les conditions physiques de la question figu-

voyait avec douleur notre système planétaire marcher à sa ruine. L'Académie des Sciences appela, sur ces menaçantes perturbations, l'attention des géomètres de tous les pays. »

rent pour la première fois » et où les développements mathématiques sont constamment appuyés sur le résultat des observations.

En Mathématiques pures, Laplace a principalement attaché son nom à la méthode d'intégration, par *intégrales définies*, de certaines équations différentielles, méthode qui tient une place importante dans la Science actuelle. On lui doit aussi la théorie mathématique des actions capillaires. Enfin, sa *théorie mathématique des probabilités* (1812), suivie en 1814 par l'*Essai philosophique* sur le même sujet, peut être mise en parallèle avec la *Mécanique céleste*. Dans ce trés bel exposé d'ensemble, la part personnelle de l'Auteur est considérable et la portée des méthodes analytiques qu'il met en œuvre dépasse très largement le sujet traité.

Laplace était né le 23 mars 1749, à Beaumont-en-Auge, dans le Calvados, d'une famille paysanne. Il avait fait ses premières études à Caen, puis à l'Ecole militaire de Beaumont. A 22 ans il venait à Paris où ses premiers travaux mathématiques furent appréciés par d'Alembert : grâce à l'appui de ce dernier il entra, comme professeur, à l'Ecole militaire.

Toute son activité est dès lors consacrée aux recherches scientifiques. En1773, il entre à l'Académie des Sciences et, au début de la Révolution, il fait partie, comme Lagrange, des diverses fondations scientifiques et, en particulier, de la Commission pour l'établissement du système métrique. Pendant la Terreur il dut quitter Paris et se réfugier à Melun. C'est le seul moment critique de sa vie et, par la suite, sénateur et comte sous l'Empire, pair de France et marquis à la Restauration, il ne cessera pas de

tenir la situation éminente qui était due à son génie[1]. Il mourut en 1827.

Legendre, dont il nous reste maintenant à parler, a laissé une œuvre fort appréciable bien qu'il soit, indubitablement, de moindre envergure que les deux précédents. Il y a peu de chose à dire de sa vie (1752-1822) qui fut tout à fait en dehors des vicissitudes politiques et uniquement consacrée à l'enseignement et à l'étude.

Ce fut un très grand travailleur et dont la ténacité fut récompensée par une ample moisson de beaux résultats, se rapportant en particulier à la théorie des nombres et à celle des intégrales elliptiques. Mais l'organisation définitive de l'une ou l'autre théorie ne fut pas son œuvre et elle était réservée à quelques-uns de ses successeurs : Gauss, Abel et Jacobi, mieux doués peut-être sous le rapport de l'invention mathématique, plus enclins en tout cas à s'élever des recherches particulières aux spéculations générales.

En théorie des nombres, Legendre a suivi la voie rouverte par Euler et Lagrange. Un de ses premiers travaux sur ce sujet fut inséré, en 1785, aux Mémoires de l'Académie. L'ensemble de ses recherches se trouve réuni dans le grand *traité* dont une première rédaction (Sous le titre *d'essai*) parut en 1798 et dont l'édition définitive est de 1830. On y trouve en particulier la première démonstration de la célèbre « loi de réciprocité » qui révèle une relation entre deux nombres premiers quelconques, loi déjà connue d'Euler mais dont Legendre devait faire de nombreu-

1. D'autres savants furent moins heureux. Mais il est exagéré d'en prétexter, comme font quelque auteurs, pour représenter le caractère de Laplace sous les couleurs les plus sombres.

ses applications dans certaines recherches sur les nombres premiers et l'analyse indéterminée du second degré. Nous signalerons aussi d'autres recherches sur les nombres décomposables en somme de trois carrés, sur l'impossibilité, énoncée par Fermat, de l'équation $x^n + y^n = z^n$ ($n = 3$ et 5, le premier cas ayant déjà été traité par Euler). Une loi empirique remarquable sur le nombre de nombres premiers compris entre 1 et n ($N = \frac{n}{\text{Log } n - 1{\cdot}08366}$) doit être également relevée parce que diverses remarques théoriques de Legendre à ce sujet marquent l'essai d'une application des méthodes de l'analyse en théorie des nombres, et c'est là un point de vue qui devait, ultérieurement, se révéler très fécond.

L'une des questions qui, d'autre part, a le plus préoccupé Legendre est l'étude des intégrales les plus simples après celles qui dépendent des fonctions élémentaires : intégrales dites elliptiques. Il se rendait compte que l'on devait chercher, dans cette direction, une extension nécessaire de l'efficacité des méthodes infinitésimales et il a longuement travaillé pour établir des formules de réduction de ces intégrales, pour perfectionner les méthodes de calcul, pour dresser enfin les tables numériques indispensables. Au moment même où il pouvait croire sa tâche achevée et où il publiait son *traité des fonctions elliptiques* (1825-1826), *Abel* et *Jacobi* arrivaient, indépendamment l'un de l'autre, à l'idée fondamentale d'envisager non pas directement les intégrales elliptiques, mais les fonctions inverses définies par ces intégrales. Idée qui amenait de très grandes simplifications, car les méthodes de Legendre peuvent être comparées à celle qui consisterait à

remplacer l'étude des fonctions trigonométriques, par l'étude de l'intégrale : $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

C'est grâce aux travaux d'Abel et de Jacobi que la théorie des fonctions elliptiques, mise à l'ordre du jour, put exercer un rôle de tout premier ordre pour le développement de l'analyse moderne. Mais, devant la richesseet l'intérêt desrésultats théoriques, le point de vue plus terre à terre, qui était celui de Legendre, fut peut-être, parfois, un peu négligé et il est permis de se demander si une œuvre qui avait de réels mérites, n'a pas été, n'est pas encore de nos jours, un peu trop oubliée.

Quoiqu'il en soit et sans qu'il soit besoin d'insister sur d'autres parties de l'œuvre de Legendre[1], on peut se rendre compte que ce savant, représentant un peu attardé d'une période de transition, tient pourtant une place notable dans l'histoire des Sciences exactes.

§ 2. La Renaissance des études géométriques; les débuts de la physique mathématique.

Les recherches dont nous aurons à parler dans ce paragraphe, sont principalement dues, dans leur principe, à des savants français et elles achèveront de révéler l'importance du mouvement scientifique en France, pendant les années qui précèdent ou suivent immédiatement la Révolution. C'est ce qui nous autorise à réunir ici l'examen de progrès réalisés dans des domaines très différents.

Vers la fin du XVIIIe siècle, on pouvait croire que le remarquable développement de l'analyse

1. Il faut du moins citer le petit chef-d'œuvre qu'est sa *Géométrie*.

mathématique rejetait définitivement au second plan les études purement géométriques. L'œuvre de Lagrange — et tout spécialement sa mécanique analytique — est assez caractéristique de cette tendance. Mais une réaction ne tarda pas à se dessiner. Elle a son origine dans les travaux de *Gaspard Monge* et de *Poncelet.*

Monge, ingénieur et mathématicien, naquit à Beaune en 1746 et mourut à Paris en 1818. Il reçut sa formation scientifique à l'Ecole du génie militaire de Mézières, où ses idées concernant l'emploi des constructions géométriques le firent distinguer et furent bientôt l'objet d'un enseignement, qui dut rester secret — afin d'assurer la supériorité du corps français de génie militaire. Au moment de la Révolution il est professeur à Paris et il eut, en 1792, un grand rôle dans l'organisation de la défense nationale. Un peu plus tard il enseigne à l'Ecole normale et à l'Ecole polytechnique, se lie à Bonaparte au cours d'une mission en Italie et participe à la préparation scientifique de l'expédition d'Egypte. Rentré à Paris après l'échec de cette expédition, il reprend son enseignement et ses recherches.

Très attaché à l'Empire, il fut accablé par les événements de 1814-1815 et sa fin en fut précipitée. Il avait d'ailleurs été disgracié, de la façon la plus indigne, par le Gouvernement de la Restauration.

L'œuvre géométrique de Monge intéresse à la fois la géométrie synthétique moderne et la géométrie infinitésimale et elle se trouve ainsi à l'origine de deux importants courants de recherches. En inventant la géométrie descriptive[1], il n'apporte pas seule-

1. Son traité sur ce sujet parut en 1800.

ment, aux arts de l'ingénieur, un précieux auxiliaire géométrique, mais il élargit le domaine de la géométrie pure, en renouvelle l'intérêt, prépare enfin, plus qu'il ne pourrait sembler à première vue, des travaux comme ceux de Poncelet. Et, par contre, nul mieux que Monge n'a compris tout le parti que l'on pouvait tirer des méthodes analytiques. Comme le dit *Darboux*[1] : « le rénovateur de la géométrie « moderne nous a montré dès le début, ses succes- « seurs l'ont peut-être oublié, que l'alliance de la « géométrie et de l'analyse est utile et féconde, « que cette alliance est peut-être une condition de « succès pour l'une et pour l'autre. »

Les travaux de Monge sur la géométrie infinitésimale, sont presque tous réunis dans le volume : *Applications de l'analyse à la géométrie.* Génération des surfaces, théorie des enveloppes et application aux équations aux dérivées partielles, définition des lignes de courbure et leur élégante détermination dans le cas de l'ellipsoïde, etc... Dans le même domaine nous citerons aussi Meusnier (1754-1793) qui compléta l'étude de la courbure des surfaces et fit connaître les premières surfaces minimas, Dupin (1784-1873) à qui l'on doit en particulier l'étude des tangentes conjuguées et des lignes asymptotiques, à qui l'on doit aussi d'importants résultats sur les systèmes triples de surfaces orthogonales.

Revenant maintenant à la géométrie synthétique il nous faut d'abord signaler deux petits traités de Lazare Carnot[2] : l'*Essai sur les transversales* et la *Géométrie de position* (i. e. projective). Mais c'est surtout,

1. *Etudes sur le développement des méthodes géométriques.*
2. A qui l'on doit aussi diverses recherches de mécanique.

dans le *Traité sur les propriétés projectives des figures*, paru en 1822, de Jean-Victor Poncelet que se retrouve, après plus d'un siècle, la tradition de Desargues et de Pascal. L'ouvrage composé en 1812, pendant des loisirs forcés de l'auteur, qui était alors prisonnier de guerre en Russie, présente, sous une forme à peu près définitive, la méthode des transformations projectives et celle des pôles et polaires. « Poncelet faisait « ainsi au plus haut degré œuvre d'inventeur, il « donnait le premier exemple d'une transformation « dans laquelle à un point correspondait autre chose « qu'un point. Toute méthode de transformation « permet de multiplier le nombre de théorèmes, « mais celle des polaires réciproques avait l'avantage « de faire correspondre, à une proposition, une autre « proposition d'aspect tout différent[1]. » Il faut ajouter que l'emploi hardi d'un heureux *principe de continuité* d'après lequel des résultats acquis doivent se conserver lorsque l'on modifie la position des éléments de la figure (en remplaçant, par exemple, deux cercles sécants par deux cercles n'ayant pas de point commun) donnait à Poncelet l'indispensable prise sur les éléments imaginaires — en lui permettant, par exemple, de définir les points cycliques, communs à l'infini à tous les cercles du plan, de définir les foyers de coniques par les tangentes isotropes, d'introduire même des projectivités imaginaires.

Poncelet dressait ainsi, en face de la Géométrie analytique, un nouveau corps de doctrine et il suscitait de nombreuses recherches. Des discussions très vives aussi : le fameux *principe de continuité* avait un énoncé fort imprécis, et qui justifiait les critiques qu'y adressait Cauchy. Poncelet pourtant se refusait à appuyer le principe en question sur l'analyse, ce

1. Darboux, *loc. cit.*

qui eut permis de l'appuyer rigoureusement et d'en marquer les limites.

Parmi les nombreux savants, français ou étrangers, qui perfectionnèrent l'œuvre de Poncelet, nous nommerons d'abord *Chasles* (1793-1880) qui fut le premier professeur de géométrie supérieure à la Sorbonne. Il écarte, il est vrai, l'emploi des méthodes de transformation, mais il défend lui aussi l'autonomie des méthodes géométriques, dressant, comme le dit Darboux « autel contre autel ». Sans entrer dans le détail de questions particulières, indiquons pourtant qu'on lui est redevable du *principe des signes* qui donne aux énoncés et aux démonstrations toute leur généralité et que, d'autre part, il perfectionne la théorie géométrique des éléments imaginaires. Cette dernière théorie ne devait prendre sa forme parfaite qu'avec *Laguerre* (1834-1886) qui put ainsi traiter complètement de la transformation des relations métriques dans les homographies et les corrélations. *Steiner* (1796-1863) qui enseigna à Berlin, est également un pur géomètre et l'un des plus grands du XIXe siècle : nous rappellerons surtout son étude des polaires des courbes algébriques et ses travaux sur les courbes et surfaces du 3e et du 4e ordre. Enfin, même dans une étude rapide, il faut signaler deux ouvrages dont l'importance n'a été appréciée que tardivement : *la Geometrie der Lage* (1847) et les *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856) de *von Staudt.* Les vues de Poncelet sur l'indépendance des méthodes projectives (indépendance de toute considération métrique) s'y trouvent développées avec une rare ingéniosité : le point de départ de v. Staudt est dans les propriétés du quadrilatère complet, établies par des considérations de géométrie dans l'espace. Dans les Beitrâge le point imaginaire est défini par une involution (ellip-

tique) à laquelle est attachée un sens de parcours afin de distinguer les deux points imaginaires conjugués. On a pu justement dire[1] que v. Staudt avait été l'organisateur de la géométrie projective.

D'autres savants rapprochaient avec succès les idées de Poncelet et la géométrie cartésienne ordinaire : Gergonne qui fut un des premiers à apprécier le *traité des propriétés projectives* et contribua grandement à dégager le principe de dualité, Bobillier, Plücker enfin qui a eu la plus grosse part à l'élaboration indispensable de coordonnées projectives, ponctuelles ou tangentielles et dont les derniers travaux, sur la géométrie des droites de l'espace, préludent à de nouvelles extensions du champ géométrique. Mais nous reviendrons sur ce sujet au dernier chapitre.

Pour compléter le tableau des Sciences exactes vers le temps de la Révolution, il nous reste à donner quelques indications sur les questions par où ces Sciences touchent à la Physique. Nous nous contenterons d'une allusion aux progrès de la Mécanique pratique, avec entre autres Borda, Prony, Poncelet, Coulomb surtout, dont c'est ici le lieu de rappeler les beaux travaux sur le frottement des solides (1779), sur l'hydraulique et sur la viscosité des fluides (1801). En Mécanique rationnelle, il faut citer les travaux de *Poisson* concernant l'intégration des équations de Lagrange, et aussi l'étude, due à Poinsot (1777-1859), du mouvement d'un solide autour de son centre de gravité — étude qui reste classique et donna un exemple frappant de l'intérêt, un peu négligé par la mécanique analytique, des méthodes géométriques.

Nous insisterons davantage sur les débuts de la Physique mathématique.

1. J. Rey Pastor, *Fundamentos de la geomeria proyctiva superior.*

L'influence de Laplace, et, par son intermédiaire, des théories newtoniennes, y est d'abord prépondérante et Laplace donnait un modèle dans sa *théorie de la capillarité*, basée sur les actions à distance, publiée en 1807. Son élève *Siméon-Denis Poisson* (1771-1840) qui fut un des mathématiciens marquants du début du XIXe siècle tira parti des études expérimentales de Coulomb pour développer les bases mathématiques de l'électro-statique : théorie tout à fait féconde, qui devait poser les problèmes les plus délicats de la théorie des équations différentielles et contribuer, comme nous le verrons, au développement d'une foule de méthodes nouvelles.

Peu de temps après se développait l'électro-magnétisme, que les applications industrielles devaient plus tard mettre au premier plan. La découverte qualitative d'Œrsted, de l'action d'un courant sur une aiguille aimantée, en fut le point de départ (avril 1820). C'est une admirable histoire que celle des recherches de l'Ecole française, débrouillant en quelques mois les conséquences théoriques de cette seule expérience. Arago, Biot et Savart, Savary, Laplace y ont leur partie, mais le rôle principal est tenu par *Ampère* (1775-1836) déjà connu par des travaux mathématiques sur les équations aux dérivées partielles qui lui avaient valu de succéder à Lagrange. Le *Mémoire sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience* n'était pas entièrement définitif et l'œuvre d'Ampère fut ultérieurement remaniée par Helmholtz (en ce qui concerne la loi élémentaire) puis, par Maxwell (pour l'introduction des courants de déplacement dans les diélectriques). Elle reste pourtant un des meilleurs *classiques* de la Science, émi-

nemment probant sur la valeur de l'analyse mathématique, lorsqu'elle s'appuie sur les qualités d'expérimentateur que l'auteur révéla en la circonstance.

Une autre branche de la physique mathématique, la théorie de la chaleur, (étude de la conductibilité), était fondée par Fourier (1768-1830). Domaine assez limité, mais où se précisa l'emploi, déjà pressenti par Lagrange, des séries trigonométriques qui intervinrent depuis dans beaucoup d'autres questions.

Enfin l'époque où nous sommes arrivés a vu aussi et grâce principalement à l'Ecole française, le renouvellement de l'Optique par le succès de l'hypothèse des ondulations lumineuses — hypothèse autrefois émise par Huyghens et qu'Euler aussi avait tenté de reprendre. C'est l'Anglais *Thomas Young* (1773-1829) qui, aux environs de 1800, ajouta à l'hypothèse ondulatoire de Huyghens la notion de *périodicité* — qui donnait la clé des phénomènes d'interference et de diffraction. Young eut aussi l'idée d'une explication correcte des effets de polarisation.

L'élaboration rigoureuse de la théorie, qui seule pouvait assurer son succès, fut l'œuvre de *Fresnel* (1788-1827). Dans l'intervalle, des expériences de Malus (1808) de Biot et Arago avaient précisé les lois de la polarisation — et la théorie de l'émission se révélait impuissante à en rendre compte. Le premier mémoire de Fresnel sur la diffraction est de 1815; il y retrouve, indépendamment de Young et d'ailleurs sous une forme beaucoup plus précise, la théorie correcte du phénomène. Le succès de l'optique ondulatoire est assuré, lorsque, en 1818, l'Académie — où pourtant, bien des sympathies allaient aux théories newtoniennes, couronne le grand mémoire sur

la diffraction. Dans les années qui suivent Fresnel achève son succès en reconnaissant, par la polarisation, la transversalité des vibrations lumineuses, en apportant la théorie de la double réfraction. Bien que, ultérieurement, un rapprochement avec l'électro-magnétisme ait marqué de nouveaux progrès, les formes mathématiques de l'optique ondulatoire sont, dès lors, inébranlablement établies.

§ 3. Cauchy.

Louis-Augustin Cauchy a été, pendant la première moitié du XIXe siècle, le plus grand mathématicien français. Son œuvre est des plus étendues et intéresse presque toutes les branches des mathématiques. Il a contribué, plus qu'aucun autre, à déterminer le développement actuel des Sciences exactes En examinant ici sa vie et ses œuvres nous aurons l'occasion de donner de brèves indications sur quelques-uns des mathématiciens français qui furent ses contemporains.

Cauchy naquit à Paris en 1789. Il dut sa formation scientifique à l'Ecole Polytechnique et débuta comme ingénieur des Ponts et Chaussées. Ses premiers travaux s'échelonnent de 1811 à 1815. Lors de la Restauration, il entra à l'Académie des Sciences et devint professeur à l'Ecole Polytechnique, puis à la Sorbonne et au Collège de France. Ses convictions royalistes et catholiques étaient profondes et, en 1830, il crut devoir s'expatrier, gagna Turin où il enseigna quelque temps, puis Prague où il fut chargé de l'éducation scientifique du comte de Chambord.

Il rentra en France en 1837 et, sur la fin de sa vie, put reprendre son enseignement à la Faculté des Sciences : il avait été dispensé, par faveur spéciale de l'Empereur, du serment de fidélité au régime. Hommage qui lui était bien dû, mais dont la valeur se trouve un peu diminuée par la parfaite neutralité politique des mathématiques. Il mourut à Sceaux en 1857.

Il faudrait un volume pour rendre compte, et rès imparfaitement, de tout ce que les mathématiques actuelles doivent à Cauchy. Nous devrons nous borner ici aux traits les plus caractéristiques.

Il a su, tout d'abord, doter l'Analyse mathématique de méthodes de raisonnement dont la rigueur parfaite n'a plus rien à envier aux formes de la Géométrie grecque. Réforme qui venait à son heure, parce qu'à l'exploration d'un vaste domaine doit succéder sa mise en valeur rationnelle. Réforme qui ne fut rien moins que stérilisante, comme on en jugera par la suite.

Les propriétés des limites, celles des fonctions continues, la notion d'intégrale étaient restées du ressort de l'intuition et c'est Cauchy qui a apporté le premier en ces questions toute la précision nécessaire. Nous avons déjà relaté les discussions survenues, au cours du XVIIIe siècle, sur la légitimité de l'emploi de séries divergentes. L'autorité de Cauchy tranche la question[1] et il donne aussi les principaux

1. Les contemporains de Cauchy perdent même de vue certaines atténuations qu'il apportait à sa *proscription* des séries divergentes. On verra avec intérêt, sur ce sujet, l'historique de M. Borel, au début de ses *Leçons sur les séries divergentes.*

Il est juste de citer, à côté de Cauchy, Abel, dont nous reproduisons, d'après le livre de M. Borel, le passage suivant : « Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration... Pour la plus grande

résultats permettant l'étude de la convergence ou de la divergence et, en général, l'étude rigoureuse des séries.

Ces méthodes rigoureuses allaient, comme première conséquence, élargir beaucoup le champ de la théorie des équations différentielles. On ne possédait encore que des méthodes particulières, s'appliquant aux équations, relativement peu nombreuses, dont la solution s'exprime par des fonctions élémentaires ou avec des signes de quadrature. Cauchy obtient des *théorèmes d'existence* permettant d'affirmer, dans les cas les plus généraux, l'existence des solutions dont il reste — problème qui est loin d'être entièrement résolu — à étudier les propriétés. Sur cette dernière question nous devons citer, immédiatement après ceux de Cauchy, les travaux de Briot et de Bouquet. La variété des méthodes suivies par Cauchy, en ces délicates questions d'existence, est tout à fait remarquable : sa première démonstration (méthode dite actuellement de Cauchy-Lipschitz) généralise le procédé de définition rigoureuse de l'intégrale et s'apparente ainsi au calcul fonctionnel fondé en 1887 par M. Volterra. La méthode des approximations successives devait être mise au point par M. Picard (1890) et devenir entre ses mains des plus fécondes. Enfin, dans le cas des données analytiques, c'est encore à Cauchy que remonte la méthode si simplement élégante des fonctions majorantes.

D'autres progrès non moins essentiels, dus également à Cauchy, concernent l'usage, *en Analyse*,

partie, les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant. » Problème qui ne devait être résolu que notablement plus tard, par les travaux de Poincaré et surtout de M. Borel.

des *imaginaires.* Les applications qui avaient pu en être faites avant lui (exponentielle imaginaire, par exemple) restaient isolées et c'est à peine si l'on connaissait (Wessel en 1797, Argand en 1806) la correspondance entre les nombres complexes et les points du plan. Cauchy a édifié la théorie générale des fonctions des variables complexes.

Il montre que l'on doit se limiter à cet égard aux fonctions dont l'intégrale, calculée le long d'un chemin du plan de la variable, ne dépend pas du chemin d'intégration : l'intégrale est alors, non pas ce que M. Volterra appellera plus tard une *fonction de ligne*, mais une *fonction de point*, analogue à celle dont on est parti. Les fonctions de ce genre, dites analytiques, peuvent être aussi caractérisées par ce fait que leur quotient différentiel a une limite (dérivée) indépendante de la direction dans laquelle s'effectue l'accroissement de la variable. La partie réelle et la partie imaginaire vérifient deux équations aux dérivées partielles caractéristiques que donne Cauchy.

Les séries entières d'une variable complexe sont evidemment des fonctions *analytiques*, au sens qui vient d'être précisé. De plus, et c'est là un point essentiel, que la définition précédente était loin de faire prévoir, toute fonction analytique est développable en série de ce genre. Cauchy établit ce fait « un des plus grands progrès qui aient jamais été réalisés dans l'analyse » dans son Mémoire sur la Mécanique céleste et le calcul des limites (Turin, 1831). Il amorce enfin l'étude des points singuliers des fonctions analytiques et développe le calcul des résidus, dont l'application fut, dès le début, des plus fructueuses. Plus de détails nous entraînerait à des développements mathématiques qui se trou-

veraient ici déplacés. Il nous suffira de dire que le point de vue de Cauchy ne s'est trouvé dépassé qu'au début du XXe siècle, par les mathématiciens qui, à la suite de M. Borel, ont étudié les fonctions quasi-analytiques.

Nous avons déjà cité, à propos des équations différentielles, les noms de Briot et de Bouquet. Il faut nommer aussi, pour leurs recherches sur les fonctions analytiques, Laurent, Joseph Liouville, Puiseux qui mit en évidence le rôle des points critiques des fonctions algébriques. Charles Hermite (1822-1901) a exercé, par son enseignement à l'Ecole Normale et à la Sorbonne, la plus grande influence. Il est l'un des meilleurs mathématiciens du XIXe siècle et la démonstration, qu'il donne en 1873, de la transcendance du nombre *e* suffirait à immortaliser son nom. Son activité s'est exercée surtout dans l'étude des transcendantes elliptiques.

C'est là une question dans laquelle la théorie générale des fonctions analytiques pouvait donner la mesure de ses forces. Aussi le traité classique de Briot et Bouquet relève-t-il fort justement ce que, dans ce domaine, on doit à Cauchy. Mais il faut pourtant rappeler que les idées qui furent, sur ce sujet particulier, le point de départ des recherches modernes, n'appartiennent pas à l'Ecole française.

§ 4. L'Ecole allemande du XIXe siècle.

Nous avons envisagé presque exclusivement, au cours des précédents paragraphes, les travaux des mathématiciens français. Il est vrai que l'Ecole française tient une place tout à fait prépondérante à la fin du XVIIIe siècle et au début du XIXe. Paris

est, à cette époque, la capitale intellectuelle de l'Europe.

Les circonstances se modifient ensuite. Bien que les relations intellectuelles entre savants des divers pays restent toujours très étroites, les diverses Ecoles nationales ont, chacune, leur originalité qui se manifeste tout au moins dans l'objet des recherches. Notre étude serait donc fort incomplète si nous ne donnions ici quelques indications sur le rôle de quelques mathématiciens étrangers, appartenant pour la plupart à l'Ecole allemande ou se rattachant à cette Ecole.

Le premier, et l'un des plus illustres est *Charles-Frédéric Gauss*, né à Brunswick en 1777. Presque toute sa carrière se passa à Gõttingen, où il avait été étudiant et où il revint, en 1807, comme Directeur de l'Observatoire et professeur d'Astronomie; il devait garder ces fonctions jusqu'à sa mort (1855).

Nous avons déjà fait allusion à ses travaux de théorie des nombres. Il a été dans ses « Disquisitiones arithmeticae » (1801), l'initiateur des méthodes modernes. Théorie des congruences du premier et du second ordre, qui vient mettre de l'ordre dans l'analyse indéterminée. Etudes, poursuivies par Jacobi, sur la loi de réciprocité de Legendre. Résolution des équations binômes et ses applications à l'inscription des polygones réguliers. Théorie générale des formes et leur application à la représentation des nombres, question fort importante pour laquelle on doit nommer, après Gauss, Eisenstein, Smith, Liouville et Hermite, Cayley et Sylvester. Gauss a abordé aussi le problème de la répartition des nombres premiers, mais les progrès décisifs

à cet égard sont dus à Tchebicheff (1821-1894) et surtout à Riemann (1826-1866) lui aussi professeur à Göttingen et qui rattacha le problème à l'étude d'une certaine fonction entière.

Si Cauchy a introduit les nombres complexes en Analyse infinitésimale, Gauss, de son côté, a beaucoup contribué à préciser leur emploi en arithmétique et en algèbre : il a donné, en outre, une démonstration du théorème fondamental, pressenti depuis fort longtemps et d'après lequel toute équation algébrique admet une racine réelle ou imaginaire.

C'est ici le lieu de parler de la *théorie des équations*, qui était restée à peu près stationnaire depuis la résolution des équations cubiques et biquadratiques. Lagrange s'en était occupé et il avait reconnu que le nœud de la question était dans l'étude des valeurs que prennent certaines fonctions des variables lorsque l'on permute celles-ci de toutes les façons possibles. Il préparait ainsi la voie au norvégien *Niels Heinrick Abel* (1802-1829) qui a laissé une œuvre mathématique remarquable, malgré une vie très courte et traversée de difficultés matérielles de toutes sortes et qui apporta les premiers résultats importants obtenus sur ce sujet depuis Cardan. La question devait être définitivement éclaircie par Evariste Galois (1811-1830) dont on sait la fin prématurée et tragique. Les théories ébauchées par Galois ont été perfectionnées, en France, par Serret, Hermite, et surtout Camille Jordan (1823-1921), en Allemagne par Kronecker, en Italie par Betti, Brioschi, etc...

Pour en terminer avec Gauss, nous citerons ses remarquables « Disquisitiones generales circa superficies curvas », mémoire fondamental en géométrie différentielle pour l'étude des géodésiques et celle

des surfaces applicables, ses recherches sur la loi des erreurs expérimentales — loi qui garde son nom, enfin ses travaux, qui ont aussi une partie expérimentale, sur l'électrodynamique et le magnétisme (étude du magnétisme terrestre). On voit que le génie de Gauss s'est exercé, et toujours avec beaucoup de bonheur, sur les sujets les plus différents.

Parmi les nombreux représentants de l'Ecole allemande nous retiendrons encore, comme particulièrement marquants, Jacobi et Riemann. Weierstrass, qui fut un mathématicien non moins remarquable a été sensiblement leur contemporain; mais il leur a survécu, son œuvre s'enchaîne peut-être plus étroitement à des recherches très récentes de sorte que nous en renvoyons l'étude au prochain chapitre.

Jacobi (1804-1851) vécut et enseigna à Koenigsberg et à Berlin. Nous avons déjà dit comment Abel et lui avaient été beaucoup mieux inspirés que Legendre en remplaçant l'étude des intégrales elliptiques par celle des fonctions elliptiques dont ils reconnurent la double périodicité. C'est Jacobi, qui survécut de 20 ans à Abel et qui fut l'organisateur de la théorie. Il a développé tout particulièrement l'étude des fonctions θ, qui sont des fonctions entières à l'aide desquelles les fonctions elliptiques peuvent s'exprimer sous forme de quotient. Il entreprit enfin l'étude des différentielles algébriques les plus générales, dites abéliennes parce qu'Abel avait établi, à leur sujet, un théorème tout à fait précieux. Il s'attacha également aux applications arithmétiques, a priori inattendues, de la théorie :

c'est une question qui fut aussi développée par Krönecker en Allemagne, par Hermite en France, de qui nous rappellerons les belles recherches sur la transformation des fonctions elliptiques et hyperelliptiques.

D'autrs recherches de Jacobi, fort intéressantes, se trouvent exposées dans ses *Vorlesungen über Dynamik*. Les équations générales de la dynamique des systèmes (équations de Lagrange) sont du second ordre et en nombre n, égal au nombre des degrés de liberté. Il est tout à fait facile de les ramener au premier ordre en introduisant des inconnues supplémentaires — ce qui double finalement le nombre d'équations. En cherchant à réaliser cette transformation de la manière la plus symétrique on est conduit, par des calculs qui furent esquissés par Poisson, développés par le mathématicien écossais W.-R. Hamilton (1805-1865), à la forme dite canonique des équations de la mécanique. Jacobi rattache la recherche des intégrales premières à l'intégration d'une certaine équation aux dérivées partielles et il peut mettre ainsi en évidence de nouveaux et importants cas d'intégrabilité. Les *Vorlesungen* sont, plus ou moins directement, à l'origine d'une foule de recherches très récentes, entre lesquelles il suffira de détacher celles de *Poincaré*, dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

Riemann enfin (1826-1866) a laissé, en quinze ans que dura sa production scientifique, une œuvre des plus originales et qui eut un grand retentissement. Nous avons déjà cité son nom à propos des recherches sur la distribution des nombres premiers, recherches où apparaît particulièrement la valeur,

pour la pure théorie des nombres, des résultats et des méthodes de la théorie des fonctions. Certains des résultats énoncés par Riemann sur ce sujet, et dont il n'avait point publié les démonstrations, ont défié longtemps les efforts des géomètres.

On doit encore à Riemann une extension tout à fait féconde de la représentation géométrique d'une variable complexe par un point de plan. Lorsqu'on a à étudier une fonction de variable complexe admettant plusieurs déterminations (fonction algébrique par exemple) il est commode d'envisager, non pas un plan mais plusieurs plans superposés, chacun correspondant à l'une des déterminations. Ces divers plans se raccordent entre eux de façon plus ou moins compliquée. Leur ensemble (dit surface de Riemann) donne une image claire et presque intuitive des relations entre les diverses branches de la fonction étudiée. — Nous saisissons ici, sur un exemple assez frappant, quelques-unes des conditions du progrès mathématique : l'idée géniale de Riemann permet de dominer la variété des questions possibles; elle fournit par les propriétés topologiques des surfaces, une classification des divers problèmes; elle réalise enfin, et aussi par l'emploi d'images géométriques, une notable économie de pensée. Les recherches de Riemann donnèrent ainsi une impulsion décisive à la théorie des intégrales de différentielles algébriques. Dans un ordre d'idée voisin, il faut enfin signaler ses études sur la représentation conforme de deux aires planes l'une sur l'autre — question qui n'est pas moins importante en théorie des fonctions que pour certains problèmes de la Physique mathématique.

On ne peut, non plus, passer sous silence le mémoire

« Sur les hypothèses qui sont à la base de la Géométrie » (dissertation inaugurale, 1854). Gauss avait montré comment certains éléments (courbure) d'une surface pouvaient être définis par des mesures effectuées sans sortir de cette surface et en dépendance de son *élément linéaire* (c'est-à-dire de la forme quadratique différentielle qui donne le carré de la distance entre deux points infiniment voisins). Riemann généralise pour le cas d'une multiplicité abstraite à un nombre quelconque de dimensions, multiplicité à laquelle il attache un élément linéaire. Il prélude ainsi au développement du calcul tensoriel, qui devait être développé par Ricci et M. Levi-Civita et se révéler, plus récemment, comme l'instrument mathématique nécessaire aux théories de la relativité.

Ecole française et école allemande peuvent résumer l'essentiel du développement des Sciences exactes pendant la première moitié du XIXe siècle. L'Ecole italienne, qui compte déjà d'éminents représentants ne prend toute son importance qu'un peu plus tard et nous la retrouverons au prochain chapitre. Nous avons dû, d'autre part, laisser presque entièrement de côté les progrès de la Physique mathématique qui est particulièrement cultivée en Angleterre, avec Stokes, Green, Lord Kelvin, J. Clerck Maxwell, beaucoup d'autres. Nous aurons aussi à y revenir.

CHAPITRE VI

Quelques traits caractéristiques du développement contemporain des sciences mathématiques.

Dans tous les domaines, le progrès scientifique s'est singulièrement accéléré depuis 1860 et jusqu'à nos jours. Parmi les causes déterminantes de cet heureux état de choses, il faut surtout indiquer la place que tiennent les Sciences, en tant que culture et par leurs applications, dans notre civilisation. Il n'est point de pays qui n'ait dû, dès lors, organiser et doter plus ou moins libéralement les Universités, Ecoles et Laboratoires, centres d'enseignement et de recherche. Les conditions matérielles du travail scientifique se trouvent ainsi assurées par l'Etat moderne et ne dépendent plus, comme il était de règle autrefois, des libéralités exceptionnelles d'un prince particulièrement éclairé — ou simplement vaniteux. L'initiative privée s'exerce aussi de la façon la plus heureuse; les périodiques spéciaux sont nombreux; les sociétés scientifiques assez florissantes; des congrès internationaux, tenus à intervalles réguliers, contribuent à resserrer le lien entre les savants des divers pays et sont l'occasion pour les questions à l'ordre du jour, de mises au point toujours utiles.

Il y a, sans aucun doute, quelques ombres au tableau : efforts encore insuffisants ou mal coordonnés alors que la Science doit être, de plus en plus, une œuvre collective. Mais les améliorations que l'on peut souhaiter voir apporter aux conditions actuelles de la recherche, les inquiétudes — fort précises — que l'on peut concevoir pour l'avenir, ne doivent pas empêcher d'apprécier pleinement, et d'admirer, l'œuvre considérable des dernières années.

Cette œuvre, dans sa complexité, ne laisse pas d'être embarrassante pour l'historien.

Le recul manque tout d'abord, pour juger objectivement certaines théories récentes, celle, pour ne citer qu'un exemple, de la relativité : l'analyse critique des notions d'espace et de temps à laquelle on a été amené par les conceptions relativistes est bien une acquisition définitive — et de grande importance — de la pensée mathématique; mais il est actuellement bien impossible de dire si là se bornera l'*actif* de la théorie d'Einstein, ou si elle jalonne la route nécessaire de la physique mathématique future.

La difficulté à laquelle nous venons de faire allusion est, somme toute, commune à toute étude historique concernant des faits récents. D'autres difficultés viennent de ce que l'étude du développement actuel des Sciences exactes implique une connaissance très approfondie de ces Sciences. Chaque discipline particulière aura son histoire, qui ne peut être écrite que par — et pour — les spécialistes. Est-il désirable, est-il même possible de faire de ces monographies historiques une synthèse ayant quelque valeur et pouvant intéresser un public plus étendu?

La réponse n'est pas douteuse et les conditions d'une telle synthèse ont été précisées, de façon que l'on peut dire définitive, par le maître français de l'histoire des Sciences : Paul Tannery. Sans prétendre remplir ici le programme très vaste qu'il a tracé, nous examinerons quelques-unes des théories les plus récentes, en cherchant à préciser leur point de départ et la signification des progrès acquis.

§ 1. L'Analyse et la Théorie des fonctions.

Il semble que le développement remarquable de cette dernière théorie soit l'un des traits les plus significatifs du mouvement mathématique pendant la seconde moitié du XIXe siècle. L'Analyse mathématique en a été, entre 1860 et 1900, entièrement renouvelée — et il s'agit de recherches qui étaient fort éloignées, dans leur ensemble, des problèmes qui avaient pu préoccuper les mathématiciens de la génération précédente, de recherches qui furent même, pour ces mathématiciens, un objet de scandale.

Ces recherches dépendent pourtant, si l'on va au fond des choses, des préoccupations de *rigueur* qui se sont introduites dans la Science avec Cauchy et qui conduisent à reconnaître les incertitudes, les insuffisances de l'intuition géométrique. Peut-être n'est-il pas inutile de donner ici au lecteur un exemple précis : la notion de *continuité* est de celles que l'on pourrait croire intuitivement claires — elle l'est si peu que pendant fort longtemps on adopta dans l'enseignement, pour définir les fonctions

continues, une propriété[1], qui leur appartient sans doute, mais qui n'est pas caractéristique.

On fut ainsi conduit à reprendre, par une analyse toujours plus profonde, les données intuitives de la Science. Cette étude fit apparaître d'autre part l'inutilité, ou le caractère arbitraire, de certaines restrictions imposées aux concepts. Les premiers exemples, dus à Weierstrass et à Darboux, de fonctions continues sans dérivée, définies par des expressions analytiques assez simples, montrèrent ainsi que l'analyste ne pouvait se limiter à l'étude des *bonnes* fonctions, celles sur lesquelles les raisonnements sont les plus simples, mais qu'il devait aussi connaître des cas les plus singuliers.

Nous pouvons donc relever, dans la moderne théorie des fonctions, une double tendance : analyse intégrale des concepts, jusqu'à les réduire à la notion de nombre pur, reconstruction progressive de ces concepts en épuisant toutes les possibilités logiques et en ne retenant, à chaque étape de la déduction, que les éléments strictement indispensables.

C'est sur ce dernier point, qu'insiste le mathématicien allemand Paul Du Bois-Reymond lorsqu'il expose (1882) ses vues sur les problèmes que comporte la « théorie générale des fonctions ». Par son œuvre philosophico-mathématique Du Bois-Reymond a été un précurseur. Il faut rappeler tout au moins qu'il a précisé et introduit dans la science telle notion, celle des *limites d'indéterminations* d'une quantité qui n'a pas de limite, qui a trouvé d'intéressantes

1. La fonction continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires. Darboux a donné le premier exemple de fonction discontinue jouissant, pourtant, de cette propriété.

applications. Il faut signaler surtout ses résultats concernant la *croissance* des fonctions.

On caractérise aisément (en examinant la limite du rapport) le cas où une fonction croît plus vite, ou moins qu'une autre et l'extension ainsi réalisée de la notion d'inégalité pouvait sembler autoriser l'espoir d'établir, pour la comparaison des fonctions croissantes, une théorie assez analogue à celle de la mesure des grandeurs. Il n'en est rien et P. Du Bois-Reymond a montré la différence essentielle entre les deux cas : il est impossible de trouver, dans la théorie de la croissance, un résultat analogue à l'axiome dit d'*Archimède*, ou si l'on préfère, il est impossible de construire une échelle de types de croissance jouant un rôle analogue à l'échelle des nombres entiers parce qu'il y aura toujours des fonctions dont la croissance dépasse celle des fonctions types, en nombre pourtant infini.

L'insuffisance, au moins logique, de l'infini qui est appelé « dénombrable », c'est-à-dire de l'infini que comporte une suite dont les éléments peuvent être numérotés au moyen de la suite des nombres entiers, se manifestait ainsi d'une façon frappante — sinon pour la première fois. Les recherches sur la théorie abstraite des ensembles de nombres, recherches qui furent commencées vers la même époque par *Georg Cantor* et auxquelles s'attachent de nombreux mathématiciens, viennent d'ailleurs rejoindre, à cet égard, celles de Du Bois-Reymond.

Par l'étude des ensembles, nous atteignons, suivant l'expression de M. Borel, le « tissu vivant » de la théorie des fonctions. Les difficultés d'une analyse arithmétique du continu — difficultés qui avaient été habilement tournées par les géomètres grecs et qui depuis, dans le développement du calcul infini-

tésimal, avaient été négligées, ou qui restaient tout au moins dans le plan philosophique — vont être remises en lumière et entièrement élucidées : c'est ici le lieu de citer les travaux de *Méray*, l'ouvrage de *Dedekind*[1] qui donne la définition abstraite des nombres irrationnels par une subdivision de l'ensemble des nombres rationnels, enfin les nombreux résultats de Cantor qui viennent préciser — d'une façon souvent intuitivement inattendue — la structure du continu.

Dans le développement de la théorie des ensembles on pourrait distinguer, semble-t-il, deux tendances successives. G. Cantor s'attache plus particulièrement à la théorie des nombres transfinis, c'est-à-dire aux concepts que l'on tire de la notion d'ensemble en faisant abstraction de toute considération relative à la nature des éléments, à leur voisinage, enfin à leur ordre. L'attrait et la valeur philosophique d'une telle étude est certainement pour beaucoup dans l'intérêt que soulèvent les premières publications du savant allemand. Mais, par la suite, nous trouvons au premier plan l'étude, en quelque sorte morphologique, des diverses catégories d'ensembles (distingués, par exemple, par les propriétés des éléments d'accumulation) et c'est par des recherches de ce genre que le progrès de la théorie des ensembles appuie et accompagne le développement de la théorie des fonctions. Il convient de signaler ici les discussions concernant « l'illusion du transfini »; elles procèdent de cette remarque, inspirée par l'examen de divers paradoxes de la théorie des ensembles, qu'il y a quelques inconvénients à raisonner sur des êtres mathématiques, que l'on considère comme déter-

1. *Stetigkeit u. irrationale Zahlen* (1872).

minés, alors qu'on ne peut les individualiser par une définition en un nombre fini de mots. Y a-t-il lieu de marquer là des limites, au moins provisoires, à la pensée mathématique? C'est une question très importante, toujours actuelle, pour laquelle nous renvoyons le lecteur à plusieurs études de *M. Borel*[1].

Nous ne pouvons prétendre donner maintenant une idée, même très sommaire, de l'ensemble des recherches — recherches qui se sont poursuivies aussi bien en France qu'en Allemagne (*Pringsheim*, *Lerch*), en Italie (*Cesaro*, *Dini*, *Veronese*, *Peano*), un peu plus tard en Angleterre et en Amérique. L'Ecole française est particulièrement brillante : on doit à *Camille Jordan* l'étude des fonctions à variation bornée et d'importants résultats sur les applications géométriques de la théorie des ensembles; *Jules Tannery*, directeur scientifique de l'Ecole Normale supérieure, exerce par ses livres et par son enseignement une très forte influence; M. *Emile Borel* développe la théorie de la mesure des ensembles et celle de la croissance des fonctions; les divers volumes de la collection qu'il a fondée « Monographies sur la théorie des fonctions » jalonnent le chemin parcouru de 1898 à nos jours; M. *René Baire* apporte une classification définitive des fonctions discontinues; M. *Lebesgue* donne une nouvelle extension à la théorie de la mesure et reprend les bases du calcul intégral pour apporter une nouvelle définition de l'opération d'intégration, plus compréhensive que la définition classique qui avait été rendue rigoureuse par Riemann; ces dernières recherches sont prolongées, plus récemment, par

1. On consultera par exemple la note IV des *Leçons sur la théorie des fonctions* (2e édition) et aussi les *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions*, p. 15 et conclusion.

les travaux de M. *Denjoy* qui envisage une nouvelle définition de l'intégrale et élucide les relations entre les deux opérations inverses de dérivation et d'intégration.

L'intérêt et l'originalité des recherches concernant la théorie générale des fonctions ne doit pas nous faire perdre de vue les progrès non moins notables, réalisés dans d'autres branches de l'Analyse. Revenons d'abord à la théorie des fonctions d'une variable complexe, dont il a été déjà longuement question au chapitre précédent.

Ch. Méray (1835-1911) en France, *K. Weierstrass* (1815-1897) en Allemagne, prennent comme unique point de départ de leurs travaux sur ce sujet le développement en série entière. Une série de cette espèce définit et caractérise une fonction analytique, d'abord à l'intérieur du cercle de convergence puis, *par prolongement analytique*, dans tout le domaine de définition; les points singuliers de la fonction apparaissent comme ceux que contourne le prolongement analytique. Le point de vue de Cauchy est plus souple, mais il n'était pas indifférent, au moment où s'organisait la théorie, que l'attention des savants soit attirée par une définition aussi simple, aussi *arithmétique*. Ce fut d'ailleurs l'origine de remarquables recherches ultérieures sur les séries entières (relations entre les coefficients et les points singuliers situés sur le cercle de convergence : MM. *Leau*, *Fabry*, et surtout *Hadamard*), puis, par une conséquence naturelle, sur la représentation des fonctions par des séries de type plus compliqué : séries de polynomes par exemple. (*Mittag-Leffler*, *Painlevé*, *Faber*, *Montel*). Indiquons en passant que la théorie des ensembles

trouve dans ces questions (en ce qui concerne par exemple l'étude des points singuliers) de très importantes applications.

Les fonctions analytiques les plus simples sont les fonctions entières qui sont définies par une série de Taylor convergente dans tout le plan, puis les fonctions méromorphes dont les seuls points singuliers à distance fini sont des pôles. Elles ont été, elles sont encore l'objet d'importants travaux. *Weierstrass* donne l'expression d'une fonction entière en produit infini où figurent les différences $z\text{-}a_i$ de la variable et des divers zéros de la fonction, le mathématicien suédois *Mittag-Leffler* (1846-1927) donne la représentation d'une fonction méromorphe comme série de fractions rationnelles dont les divers termes caractérisent les pôles. Ce sont là des résultats essentiels qui généralisent respectivement la décomposition d'un polynome en facteurs du premier degré et la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. La généralisation ne va d'ailleurs pas sans quelques complications telles que l'introduction, dans le produit infini qui représente une fonction entière, de facteurs exponentiels. Si nous y faisons allusion ici, c'est parce que les exponentielles introduites caractérisent le *genre* de la fonction entière dont dépend l'ordre de grandeur de la fonction. Les principaux travaux sur ce sujet sont ceux de *Laguerre*, de *Poincaré*, de MM. *Hadamard* et *Borel*, de *P. Boutroux*, de MM. *Lindelöf*, *Wiman*, *Blumenthal*, *Valiron*. Dans un ordre d'idées différent nous avons enfin à indiquer, comme origine de nombreuses recherches, le beau théorème de M. *Picard* : une fonction entière prend nécessairement toutes les valeurs possibles, une seule au plus exceptée. Les extensions

successives (*Landau. Carathéodory*, *Schottky*, *Julia*) permettent de préciser l'allure d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel.

La théorie des fonctions analytiques s'est prolongée, plus récemment, dans deux directions : M. *Borel* montre d'abord que le point de vue de Cauchy, tout à fait équivalent — dans la théorie classique — à celui de Méray-Weierstrass, permet pourtant une extension grâce à laquelle on peut traverser, par prolongement analytique, certaines lignes singulières. D'autre part l'étude de certaines équations aux dérivées partielles conduit à définir des classes de fonctions de variable *réelle* caractérisées par ce fait que deux fonctions d'une même classe ne peuvent coïncider dans un intervalle, si petit soit-il, sans être partout identiques (*Hadamard*, *Denjoy*, *Carleman*).

Le lecteur a pu se rendre compte que, pendant la période précédente, l'étude des transcendantes elliptiques avait été fort avancée et, amorcée, l'étude des intégrales de différentielles algébriques. De nombreux problèmes se posaient — et quelques-uns fort difficiles — qui n'ont pas été laissés de côté, malgré l'extension considérable du domaine de l'analyse. Il faut tout particulièrement citer ici les recherches de M. *Emile Picard* qui a fondé la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables et de leurs intégrales. Il est suivi dans cette voie féconde par *G. Humbert* et les géomètres de l'Ecole italienne : *Enriquez*, *Severi*, *Castelnuovo*. Dans un autre ordre d'idées, *Henri Poincaré* (1845 - 1912), dont, l'œuvre domine presque toutes les branches du savoir mathématique, apporte la généralisation définitive, que plusieurs grands mathématiciens avaient pressentie, mais recherchée en vain, des fonctions elliptiques : les fonctions fuchsiennes,

qu'il définit en 1881 se reproduisent par certains groupes discontinus de substitutions; elles donnent, non seulement une représentation paramétrique des courbes algébriques de genre quelconque (alors que les fonctions rationnelles donnent la représentation des courbes de genre *un*) mais fournissent aussi l'intégrale de toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques.

Il s'en faut, de beaucoup, que nous ayons passé en revue tout le champ actuel de l'Analyse mathématique. Il est d'abord une branche de cette science, le *calcul fonctionnel*, de création récente, dont les méthodes sont assez autonomes pour justifier un exposé séparé. Ce sera l'objet du prochain paragraphe. D'autre part, nous avons laissé entièrement de côté les progrès réalisés dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles. Mais quelques détails sur ce sujet pourront être donnés à propos du calcul fonctionnel, d'autres lorsque nous examinerons, dans le paragraphe consacré au développement des méthodes géométriques, l'importance prise, dans les Sciences exactes, par la notion de groupe de transformation, il reste à signaler ici les travaux de M. *Paul Painlevé* et de ses élèves sur les points singuliers des intégrales des équations différentielles, travaux qui se relient très étroitement à la théorie des fonctions.

§ 2. Le calcul fonctionnel

On désigne ainsi la partie de l'Analyse mathématique dans laquelle l'élément fondamental est, non plus le nombre, mais la fonction. Le calcul fonction-

nel apparaît donc comme le terme le plus élevé d'une évolution qui a amené aux généralisations successives de la notion de nombre : entiers, fractions, irrationnelles, nombres négatifs, imaginaires, etc...; il traite des opérations entre fonctions.

Il y a naturellement de très nombreux points de, contact et une liaison très intime entre l'Analyse ordinaire et l'Analyse fonctionnelle : dès l'acquisition de la notion de fonction, des problèmes se posent, qui appartiennent en fait au Calcul fonctionnel. Cette discipline ne s'organise pourtant, avec ses méthodes propres adaptées à la difficulté des questions traitées, que vers la fin du XIXe siècle. M. *Vito Volterra*, dont les premiers travaux sur ce sujet sont de 1885, en a été le fondateur.

Avant cette époque un Chapitre particulier de l'Analyse s'était pourtant constitué : le *calcul des variations* qui traite de la détermination de fonctions inconnues par des propriétés de maximum ou de minimum. Nous avons déjà vu qu'il remonte à *Lagrange*[1]. Quelques indications succinctes suffiront à préciser ici le sens des progrès ultérieurs.

Lagrange avait obtenu somme toute, et sous une forme qui s'est révélée définitive, les équations fondamentales du problème. Mais bien des détails, à la base même de son analyse, laissaient à désirer sous le rapport de la rigueur. Un des principales difficultés était la suivante : les problèmes de calcul des variations concernent la recherche de maximum ou minimum relatifs; étant donné une intégrale, ou figure la fonction à déterminer, il s'agit de rechercher le cas où cette fonction donne à l'intégrale une va-

1. Cf. chap. V, § 1, p. 133.

leur plus petite, ou plus grande, que toute fonction *voisine*. Or, la notion de *voisinage*, très simple dans le cas d'une variable numérique peut être appliquée de diverses manières au cas des fonctions; on doit distinguer, avec *Weierstrass*, le voisinage d'ordre *zéro*, qui n'implique aucune restriction pour les dérivées, le voisinage d'ordre *un*, qui concerne, non seulement les fonctions considérées, mais leurs dérivées premières, etc... On conçoit sans peine que le problème du calcul des variations se pose différemment suivant l'ordre de voisinage que l'on considère, de sorte que la distinction établie par Weierstrass a été tout à fait fondamentale dans la recherche des conditions rigoureuses de l'extremum. Les conditions suffisantes ont été obtenues indépendamment par *Weierstrass* et par *Darboux* dont les belles recherches sur les lignes géodésiques (lignes de longueur minimum tracées sur une surface) doivent être rappelées ici.

Les recherches de M. Volterra, dont nous devons maintenant nous occuper, ont eu pour point de départ le calcul des variations. Mais, de prime abord, elles dépassent le cadre de cette théorie et posent les bases de l'Analyse fonctionnelle générale. M. Volterra y arrive en utilisant systématiquement le procédé de passage à la limite qui sert à la définition de l'intégrale et dont la portée bien plus vaste avait été méconnue avant lui.

Rappelons en effet, que, pour définir une intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, on peut diviser l'intervalle ab en parties égales et envisager les valeurs de f aux points de division (en nombre n) : leur somme $s = f_1, + f_2 +$

... + f_n, divisée par n tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers la valeur moyenne de la fonction, très simplement liée à l'intégrale. La somme s est une fonction des n variables f_1 $f_2 ... f_n$ tandis que la valeur moyenne (ou l'intégrale) dépend de toutes les valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle ab. C'est une fonction de ligne, ou fonctionnelle. Elle est très particulière, mais le procédé adopté pour la définir s'applique aux cas plus généraux et précise le passage des fonctions de n variables aux fonctionnelles. La définition de la dérivée d'une fonction de ligne résulte ainsi de celle de dérivée partielle, la notion de différentielle conduit à celle de variation d'une fonctionnelle. Bref M. Volterra peut établir ainsi une sorte de correspondance entre les diverses théories de l'Analyse ordinaire et celles du calcul fonctionnel. Dans les difficultés que présente cette dernière étude, le rapprochement ainsi établi se révèle comme une incomparable méthode de découverte.

Le lien entre la nouvelle analyse et le calcul des variations peut être marqué, en outre, par les travaux de MM. *oVlterra*, *Fréchet*[1], P. *Lévy* sur l'extension, aux intégrales multiples, de la théorie de Hamilton-Jacobi, par les travaux de M. *Hadamard* sur la variation des fonctions de Green et de Neumann (fonctions qui jouent un grand rôle dans la théorie mathématique des potentiels). Ces recherches, dont on doit aussi rapprocher la remarquable extension des fonctions de variable imaginaire donnée par M. *Volterra*, conduisent à traiter des équations aux dérivées fonctionnelles. Ces équations qui, dans le procédé de passage à la limite donné par M. *Volterra*, répon-

1. Dont il faut aussi citer les études sur la théorie des ensembles, dans ses applications au calcul fonctionnel.

dent aux équations différentielles ordinaires, ont été étudiées par M. *Paul Lévy*. Enfin, parmi les plus récentes acquisitions de l'Analyse fonctionnelle, nous indiquerons le concept d'intégrale, ou plus exactement de moyenne dans un espace fonctionnel, défini et étudié par *Gâteaux*.

Les fonctionnelles les plus simples, sont évidemment les *fonctionnelles linéaires*, dont l'importance ressortit en particulier de ce que le variation d'une fonction de ligne quelconque est une *fonctionnelle linéaire*. On peut citer à ce sujet les travaux de M. *Hadamard*, qui en a donné la première expression analytique générale, de MM. *Fréchet*, *Riesz*, tout récemment de M. *Fantappié*. Les importantes recherches de M. *Pincherle*, et aussi de *Bourlet* doivent également être rappelées ici, bien que les méthodes soient assez différentes : comme on l'a vu précédemment, l'idée directrice de M. Volterra consiste à envisager les fonctionnelles comme dépendant d'une infinité *continue* de variables et le passage à la limite qu'il envisage va du fini à l'infini, mais aussi du discontinu au continu. On peut aussi envisager la fonctionnelle comme fonction d'une infinité dénombrable de variables (ce seront, par exemple, les coefficients d'une série de Taylor de la fonction-argument), en restant donc dans le domaine du discontinu : c'est ainsi que procédait *Bourlet* et M. *Pincherle*. Le point de vue est évidemment plus particulier[1] que celui qu'a adopté M. *Volterra*, mais les points de contact sont nombreux, comme en témoignent, par exemple, les recherches de M. *D. Hilbert* sur la théorie des équations intégrales.

1. De même que ce serait restreindre la portée de l'Analyse ordinaire que de limiter les raisonnements aux seules fonctions développables en série entière.

Cette dernière théorie constitue l'un des chapitres les plus avancés de l'analyse fonctionnelle, les plus riches aussi, dans l'état actuel de la Science, en ce qui concerne les applications. La méthode générale pour la résolution des équations intégrales a été indiquée par M. *Volterra*, en 1896. Elle réside dans l'application du procédé général de passage à la limite aux formules donnant la solution d'un système d'équations algébriques (système du 1er degré s'il s'agit d'une équation intégrale linéaire). Le cas où les limites d'intégration sont variables a été traité par M. *Volterra*, celui où les limites sont fixes par *Fredholm*, la solution de l'un ou l'autre cas dépendant de l'idée si simple de M. *Volterra*. Ces recherches ont été poursuivies dans diverses directions, notamment par M. *Goursat*, *Picard* à qui l'on doit l'étude délicate des équations de 1re espèce à limites fixes et aussi des équations singulières, *Schmidt*, *Hilbert*, *Weyl*, *Lalesco* et beaucoup d'autres.

Plus de détails nous entraîneraient à des développements mathématiques qui seraient hors de propos.

Nous nous contenterons donc, de donner en terminant quelques indications sur les applications de la théorie. Les plus importantes concernent la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles : les problèmes qui se posent à ce sujet et que différencient les divers types possibles de « conditions aux limites » amènent aux diverses classes d'équations intégrales.

L'étude des équations intégrales permet ainsi de dominer les problèmes particuliers, de les classer; elle donne pour les traiter des méthodes uniformes — et qui sont d'ailleurs les plus simples. Ses avantages, mis en évidence par les beaux travaux de *Fredholm*, sont particulièrement sensibles dans les questions

de physique mathématique : problèmes de Dirichet et de Neumann concernant l'équation caractéristique des potentiels, recherche des solutions fondamentales (celles, par exemple, qui correspondent aux harmoniques d'une plaque vibrante, question qui fut étudiée, pour la première fois, par Poincaré dans un mémoire resté célèbre).

M. *Volterra* a introduit aussi dans la science les équations intégro-différentielles, dans lesquelles la fonction inconnue figure non seulement sous le signe d'intégration, mais encore par l'intermédiaire de ses dérivées. Ces équations interviennent en particulier dans l'étude due à M. *Volterra, des phénomènes héréditaires*. Nous abordons là une question qui présente un égal intérêt scientifique et philosophique : on sait que les équations classiques de la Mécanique — ou de la Physique mathématique — déterminent les états futurs d'un système à partir des « données initiales » (positions et vitesses lorsqu'il s'agit d'un mouvement) concernant l'état du système à un instant dit « initial ». L'Analyse qui leur convient laisse donc échapper tous les phénomènes de déformation permanente, retards, hystérésis, etc... phénomènes « héréditaires ». Il se peut que ces phénomènes ne constituent qu'une *apparence*, tenant à notre connaissance imparfaite des « données initiales » ou qu'ils proviennent réellement de causes dont l'effet se manifeste avec un certain retard. Dans l'une ou l'autre hypothèse, il n'est pas douteux qu'une analyse spéciale s'impose pour en développer la théorie mathématique[1]; les bases en ont été trouvées par le calcul fonctionnel.

1. M. Volterra rappelle à ce propos que, quelque opinion que l'on ait sur la *réalité* des *actions à distance*, on ne peut se passer des théories que Newton a développées à partir de cette conception.

§ 3. La théorie des groupes et la Géométrie.

La théorie des groupes de transformation n'intervient pas seulement dans des recherches géométriques, mais elle a pris une grande importance dans les domaines les plus divers de la Science. Peut-on même dire *la théorie*, au singulier, alors que l'étude des *substitutions* et celle des *groupes continus* se différencient par les méthodes aussi bien que par leur champ d'application, de sorte que le seul lien entre elles réside dans la notion même de groupe (ensemble d'opérations telles que deux d'entre elles, appliquées successivement, équivalent à une autre opération de l'ensemble, convenablement choisie) et dans une certaine identité formelle du plan (étude des sous-groupes d'un groupe donné, caractérisation d'éléments invariants par des groupes d'opérations). Mais c'est précisément dans ces éléments abstraits qu'il faut mesurer la valeur de la théorie en question.

C'est l'étude des groupes de substitutions qui a été abordée la première et nous avons déjà dit comment, après *Lagrange* (et *Cauchy*) *Galois* y a trouvé les éléments d'une solution complète du difficile problème de la résolubilité des équations algébriques. Divers passages de ses écrits montrent d'ailleurs que *Galois* a eu l'intuition de l'importance que pouvait prendre le même point de vue en Analyse. Il laissait seulement une ébauche ; le développement de la théorie des groupes de substitution est dû principalement aux travaux de *Camille Jordan* et à ceux de *Kronecker* : le grand *traité des substitutions et des équations algébriques* du premier (1870) est une œuvre classique.

D'après le témoignage de *Darboux*[1], le traité qui vient d'être cité a eu son influence sur la pensée du Géomètre norvégien *Sophus Lie* (1842-1899) auquel on doit l'extension dans le domaine de l'Analyse de la théorie des groupes. *Lie* développe l'étude des groupes continus de transformation, où apparaît en particulier la notion nouvelle de transformation infinitésimale. Cette étude a, pour l'intégration des équations différentielles et aux dérivées partielles, un rôle analogue à celui qui appartient aux théories de *Galois* dans le domaine des équations algébriques. Il faut citer, à cet égard, après les travaux de Lie, ceux de M. *Emile Picard* et de M. *Vessiot* sur les équations différentielles linéaires, ceux de M. *Drach* sur l'intégration logique des équations différentielles. La théorie des groupes continus a été l'objet d'importantes recherches de *Poincaré* et de M. *Cartan*.

Les travaux de Lie et ensuite ceux de *F. Klein*[2] ont mis en évidence le gros intérêt que présente la notion du groupe dans la Géométrie élémentaire: les concepts généraux de point, droite, plan, etc... impliquent que l'on fasse abstraction, en quelque sorte, de la position de ces éléments dans l'espace; de même l'étude des figures égales, tandis que la considération des rapports amène à envisager les transformations par similitude. Déplacements (auxquels il faut joindre les symétries) et similitudes forment un groupe. Le point de départ de *Klein* est dans la remarque que la Géométrie élémentaire a

1. *Etude sur le développement des méthodes géométriques,* conférence au Congrès de Saint-Louis, 1904.

2. Ainsi le célèbre « programme d'Erlangen » (*Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*), 1872.

pour objet l'étude des propriétés des figures invariantes par les transformations de ce groupe et que les divers chapitres de cette Science concernent les propriétés invariantes par les différents sous-groupes du groupe fondamental. Il apparaît alors que n'importe quel groupe de transformations peut, de même que celui des déplacements et des similitudes, servir à définir une géométrie.

C'est là un point de vue qui était singulièrement opportun au moment où, à côté du vieil édifice euclidien, s'étaient constituées d'autres théories géométriques : géométrie sphérique de *Riemann*, géométrie de *Bolyai-Lobatchewsky* dont *Beltrami* a montré le premier la non contradiction en l'identifiant avec la géométrie des surfaces à courbure constante négative; métrique générale de *Cayley* qui domine l'une et l'autre des deux géométries précédentes; plus récemment, géométrie réglée (*Koenigs*), géométrie anallagmatique (*Coolidge*, *v. Weber*, *Hadamard*, *A. Bloch*), etc... L'idée de Klein permet une classification qui fait apparaître les relations de ces nombreuses théories : équivalence lorsque les groupes fondamentaux, quelle que soit d'ailleurs la nature de leurs éléments, ont même structure (exemple : équivalence entre la géométrie projective sur une droite ou sur une conique; entrela géométrie réglée et la géométrie des sphères de Lie), degré de généralité suivant que les groupes fondamentaux sont plus ou moins amples : l'introduction d'un élément invariant fait passer d'une géométrie à une autre dont le sous-groupe caractéristique est défini par cet élément invariant (ainsi la géométrie affine résulte de la géométrie projective par l'introduction d'une droite invariante, droite de l'infini).

Les considérations précédentes ont leur intérêt en qui concerne l'*axiomatique*, les postulats ayant alors pour rôle de caractériser le groupe fondamental.

L'Axiomatique est d'ailleurs une question sur laquelle ont porté beaucoup de recherches récentes et il y a là un mouvement assez analogue à celui qui aboutit, après Abel et Cauchy, à la revision logique de l'Analyse. L'idée fondamentale de l'Ecole logique que representeront surtout Peano, Veronese, D. Hilbert est celle de l'*arbitraire* des axiomes qui viennent préciser les concepts primitifs. Mais il faut établir leur indépendance et leur compatibilité : les démonstrations à ce sujet, fort délicates, reposent généralement, en dernière analyse, sur une traduction algébrique.

Dans un ordre d'idées tout différent il nous reste à noter, à la fin du XIXe siècle, le développement considérable de la *Géométrie différentielle* dont nous avons déjà noté les premiers progrès, avec *Monge*, *Gauss*, etc. Deux œuvres sont à ce point de vue tout à fait représentives, celle de *Gaston Darboux* (1842-1917) et celle de *L. Bianchi*.

Les *Leçons sur la théorie des surfaces* de Darboux, suivies des *Leçons sur les systèmes triples orthogonaux* et des *Leçons de Géométrie analytique* constituent un ensemble d'une incomparable richesse. Dans la préface de son premier volume (1887) l'auteur nous apprend qu'il a commencé « l'exposition de la théorie des surfaces dans le but unique d'y trouver des applications nombreuses de la théorie des équations aux dérivées partielles. » Dans toute la suite se manifeste cette alliance de la Géométrie et de l'Analyse « utile et féconde, et qui est peut-être une con-

dition de succès pour l'une et pour l'autre. » Les relations établies par Darboux entre la théorie des congruences et une méthode (dont le principe remonte à Laplace) pour traiter certaines équations linéaires, sont tout à fait caractéristiques à cet égard. Il faut signaler aussi le développement qu'il donne à l'élégante méthode cinématique du trièdre mobile, son introduction des coordonnées pentasphériques, ses études sur les surfaces cyclides. L'un des problèmes les plus difficiles et les plus importants de la Géométrie différentielle concerne la détermination des surfaces applicables; il a été l'objet de remarquables travaux de *Guichard* et de *Bianchi*.

§ 4. Mécanique et Physique mathématique.

Les progrès de la Mécanique se sont poursuivis dans les directions qu'indiquait l'œuvre de *Lagrange* et de ses successeurs immédiats. Les plus remarquables sont peut-être ceux qui concernent la Mécanique analytique; nous y avons fait allusion à propos des travaux de *Jacobi*, signalons aussi la forme donnée par *M. Appell* aux équations du mouvement et qui convient aux systèmes non holonomes.

Le grand *traité de Mécanique rationnelle* de M. Appell réalise une harmonieuse synthèse des diverses méthodes qui peuvent être suivies dans le développement de cette science. Il la montre à peu près achevée. Il semble que, dans son état actuel, la Mécanique rationnelle soit mûre pour une étude logique de son axiomatique, étude qui sera certainement plus difficile que pour la Géométrie, qui n'est en fait un peu avancée que pour des théories particulières

(recherches de M. *Marcolongo* sur les bases axiomatiques de la statique du solide), mais que préparent dans des directions diverses, les travaux de M. *Painlevé* sur le frottement, ceux de *Delassus* sur la notion générale de liaison et sur l'étude des liaisons unilatérales, ceux de *E. et F. Cosseral* sur la généralisation du principe de moindre action.

Mention doit être faite du développement pris par la mécanique des milieux continus : hydrodynamique et hydraulique, aérodynamique, théories de l'élasticité et théories annexes (résistance des matériaux). Ces différentes théories ont un intérêt pratique considérable, mais elles posent aussi les problèmes mathématiques les plus difficiles, de sorte que les progrès réalisés dépendent étroitement du développement de l'Analyse. Nous en donnerons un seul exemple très frappant, en rappelant l'importance qu'ont pris en hydrodynamique les méthodes de la théorie des fonctions analytiques et en particulier la notion de représentation conforme: travaux de M. Levi Civita et de M. H. Villat sur les mouvements avec surface de discontinuité, travaux de Joukowsky sur la théorie de l'aile portante.

En Astronomie et en Mécanique céleste, le XIX[e] siècle fut l'époque des réalisations : réalisations basées sur l'œuvre de *Laplace* et *Lagrange*. L'emploi des développements en série et de la méthode de variation des constantes permet de suivre le progrès des procédés d'observation en donnant une théorie du système du monde de plus en plus précise et complète. Il faut rappeler ici les découvertes bien connues de *Le Verrier*, la théorie de la lune de *Delaunay*, les travaux de *Tisserand* et son grand *traité de Mécanique céleste* qui résume sous une forme défi-

nitive tout l'effort du siècle. L'Astronomie physique, dont le point de départ fut l'étude spectroscopique des astres, prend actuellement le pas sur l'Astronomie mathématique. Que cette dernière n'ait pas dit son dernier mot, c'est ce que monte à l'évidence la très riche littérature contemporaine sur les théories cosmologiques, les travaux particuliers, tels que ceux de M. *Störmer* sur la théorie des aurores boréales, enfin, et surtout, les travaux de *Henri Poincaré* (application des invariants intégraux, étude des solutions périodiques et des intégrales voisines, etc...) travaux qui renouvellent *les méthodes* de la mécanique céleste. Cette dernière science voit d'ailleurs son champ d'action s'élargir considérablement par suite des nouvelles spéculations sur la structure de l'atome.

Nous retrouvons le nom de Poincaré en examinant enfin l'état actuel de la physique mathématique. Electro-magnétisme et théories connexes, physique moléculaire sont au premier plan de la Science et préoccupent également le mathématicien et l'expérimentateur. Nulle part sans doute l'évolution n'a été, n'est encore aussi rapide, à tel point que les théories se développent, s'imposent, puis disparaissent dans l'espace de quelques années. Il y a, constatait Poincaré vers 1900, une « crise » de la Physique mathématique, crise de croissance, éminemment profitable. Cette « crise » dure toujours et paraît, actuellement encore, fort loin de son terme.

Il n'entre pas dans notre plan d'en suivre ici le développement. Le bénéfice le plus important de la « crise » en question n'est-il pas de l'ordre philosophique et ne consiste-t-il pas dans une meilleure

compréhension de l'arbitraire nécessaire des explications scientifiques?

Si nous jetons un regard en arrière, nous constatons que, de tout temps, la tendance a été de faire des théories déjà constituées le cadre dans lequel doit entrer, de gré ou de force, toute la philosophie naturelle. Dans l'antiquité grecque, c'est la Géométrie ou la théorie des nombres qui tiennent ce rôle, d'une manière plutôt décevante. Ensuite, au XVIIIe siècle, c'est l'Astronomie qui fournit le modèle et toute la physique mathématique doit se réduire à la Mécanique. La théorie ondulatoire de la lumière, qui vient rompre « la belle unité de la science » rencontre l'opposition que l'on sait; elle s'impose pourtant et l'on s'arrêtera quelque temps au compromis qui consiste à admettre dans la mécanique universelle le fluide *éther*, dont les propriétés mécaniques ne laissent pas d'être assez troublantes. La « crise » de la physique mathématique » s'ouvre au moment où diverses recherches expérimentales (bien connues) montrent l'insuffisance, voire même les contradictions, de la dualité matière-éther. Quel qu'en soit le dénouement il nous semble (et c'est ce sur quoi nous désirions insister) que l'attitude du savant en doive être assez profondément modifiée. Un certain scepticisme, peut-être, d'avoir vu coexister dans la science des théories contradictoires et également utiles, d'avoir reconnu la diversité des explications possibles, et entre lesquelles il n'est pas de moyen de choisir. Scepticisme qui n'implique en aucune manière le découragement, mais qui est le fait de la maturité, et qui donne au savant, devant son œuvre, la liberté d'esprit nécessaire pour que la Science faite ne soit point un obstacle à de nouveaux progrès.

Les origines de ce sage scepticisme apparaissent dans l'œuvre philosophique et critique de Henri Poincaré. Ce dernier montre, en particulier, que les obscurités du traité d'électricité de Maxwell disparaissent si l'on prend pour guide la proposition suivante, dont il est superflu de relever l'importance : un phénomène qui admet une explication mécanique en admet une infinité; il importe donc peu de développer telle ou telle solution particulière, la question primordiale est celle de *possibilité* d'une explication. Que cette proposition ait été ou non dans la pensée de Maxwell, énoncé et démonstration ont été donnés, pour la première fois, par Poincaré.

Pour terminer, nous indiquerons rapidement les différents points de vue qui ont dominé tour à tour en Physique mathématique, mais que l'on retrouve, à quelques années d'intervalle, singulièrement modifiés ou enrichis par pénétration mutuelle. Certaines théories (élasticité, théorie de la lumière, électromagnétisme) se sont développées dans l'hypothèse, au moins provisoire, d'un milieu matériel continu et l'on est ainsi conduit directement à des équations aux dérivées partielles. Plus souvent on fait intervenir la structure moléculaire de la matière et l'apparence continue est alors un effet *macroscopique*: les équations aux dérivées partielles s'établissent par un calcul de moyenne. Les théories ou intervient ainsi la discontinuité sont très nombreuses : corpuscules électriques (électrons), magnétons de Weiss, quanta d'énergie. Il faut noter enfin, à propos des théories moléculaires, que les phénomènes de radioactivité et de rayonnement permettent d'atteindre l'édifice atomique.

Nous avons à indiquer aussi la tendance à prendre

pour point de départ — plus abstrait — des principes généraux (se rattachant, par exemple, au calcul des variations). L'un des meilleurs exemples est celui de la thermodynamique qui, selon les idées de *Duhem* et de l'école énergétique, domine toute la physique. Ultérieurement les principes de la thermodynamique apparaissent comme des vérités d'ordre statistique et se déduisent de la théorie cinétique de la matière. Peut-être faut-il placer ici également les dernières théories sur la relativité qui aboutissent à une géométrisation de la physique, puisque gravitation et électromagnétisme dépendent des propriétés spatiales.

CONCLUSION

L'avenir de notre culture scientifique

Au terme de cette étude il est impossible, nous semble-t-il, de ne pas interroger l'avenir : le rythme actuel, très accéléré, du progrès scientifique, peut-il se maintenir ou, au contraire, devons-nous nous attendre à un ralentissement, voire à une régression ?

Sans prétendre traiter en quelques pages une question aussi délicate, aussi vaste — et aussi peu scientifique — nous chercherons à donner ici quelques-unes des raisons qui peuvent, dans l'ambiance actuelle, incliner à l'optimisme ou au pessimisme.

Et, tout d'abord, les nombreux travaux récents sont bien loin d'épuiser les possibilités de développement des Sciences exactes. Les progrès de la Physique ont ouvert de nouveaux domaines à l'activité des mathématiciens. Les applications des mathématiques à la Biologie sont à leur début, mais les résultats déjà acquis — application du calcul des probabilités, théorie des associations biologiques de M. Volterra, sont très heureusement significatifs. Nulle part d'ailleurs, et même en ce qui concerne les théories les plus abstraites, ou les plus anciennes, nous ne paraissons approcher d'un état où, la science étant faite, le savant devrait se borner au rôle, assez ingrat, de conservateur.

La comparaison, assez indiquée, entre notre époque et la période gréco-alexandrine, — qui fut égale-

ment brillante, mais suivie d'une rapide décadence — est donc toute à notre avantage. Aucun symptome d'épuisement, comme dans la mathématique hellène, dont le domaine était plus restreint, puisqu'elle se limitait à la Géométrie et à l'Astronomie, à laquelle manqua, comme nous l'avons vu, un certain sens de la synthèse scientifique, où enfin axiomes et postulats ont un caractère définitif et paraissent participer à l'évidence des formes mêmes du raisonnement (même lorsqu'il s'agit de principes aussi arbitraires que celui du mouvement circulaire des corps célestes). Ce dernier point mérite qu'on y insiste. Le lecteur a pu voir que le développement de la géométrie moderne, de v. Staudt à Riemann et Einstein, dépend en partie de celui de l'axiomatique. Qu'il y ait ainsi, dans toute théorie mathématique, matière à une revision et à un perfectionnement indéfini des principes, voilà qui peut nous libérer tout à fait de la crainte de voir un jour — très éloigné — une mathématique achevée, stérilisée dans sa perfection.

Si nous trouvons ainsi d'excellentes raisons *intrinsèques* pour être optimistes sur l'avenir réservé aux sciences exactes, une réflexion sur les conditions extérieures de la recherche nous amènera à des conclusions beaucoup moins satisfaisantes.

Le réalisme utilitaire de notre époque est assez inquiétant, si l'on songe à la prétention, mainte fois exprimée en ces dernières années, d'y chercher un test des valeurs intellectuelles, voire même morales. Il peut compromettre toute manifestation libre et désintéressée de la pensée. En ce qui concerne

spécialement les Sciences, ce serait une singulière illusion que de les croire gardées par leur valeur pratique : il est bien trop facile d'en séparer tout ce qui a un intérêt technique immédiat et de laisser tomber le reste. Mauvais calcul, sans doute, mais dont le désavantage ne deviendrait évident qu'à longue échéance. Les vues utilitaires ne vont pas si loin. — La question des enseignements de culture et de leur renforcement souhaitable est donc une question bien actuelle. Elle ne risque point d'être résolue par la méthode qui consiste à jeter bas programmes et plans d'études pour prendre le contre-pied de la réforme précédente.

Une dernière remarque touchant l'extrême complexité de la civilisation européenne actuelle et la fragilité qui en résulte, du moins en ce qui concerne les expressions les plus hautes de cette civilisation. La production scientifique ne s'est point ralentie aux temps troublés de la Révolution française, ni pendant les guerres de l'Empire : le début du XIXe siècle est même, pour la Science française, une période d'intense rayonnement. Les bouleversements politiques ont de nos jours, auraient plus encore dans l'avenir, de tout autres répercussions et suffiraient probablement à compromettre la valeur de la culture européenne. Aussi est-il un peu troublant que l'on ait pu qualifier notre temps comme celui « de l'organisation intellectuelle des haines nationales ».

Note Bibliographique

Quelques références ont été données dans le texte. Pour les compléter nous devons d'abord renvoyer le lecteur à l'ouvrage fondamental de *Moritz Cantor* :

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (Leipzig, Teubner ; 3 volumes (jusqu'en 1758) ont été écrits par Cantor, l'œuvre a été continuée par quelques-uns de ses disciples).

Nous renverrons surtout à l'excellent petit livre de M. G. *Loria* :

Guida allo studio della storia delle Matematiche (Milan, Hoepli, 1916) ouvrage qui remplit très parfaitement le but indiqué par son titre.

Deux revues d'Histoire des Sciences doivent être signalées : *Isis* (*G. Sarton*) organe de l'History of Science Society, *Archeion* (*A. Mieli*), organe du Comité International d'Histoire des Sciences.

TABLE DES MATIÈRES

IMPRIMERIE J. BIÈRE

18-20-22, RUE DU PEUGUE

BORDEAUX

1930




a39003 001015741b

